

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. А.Н. Майков. Э-во и магнетизм 1983
 2. С.Т. Калашников. Э-во 1985
 3. В.В. Сивухин. Общий курс физики Т.3 1983
 4. И.Е. Тамм. Основы теории э-во 1989
-
5. Сборник γ -р по атомной физике. Э-во и магнетизм (по р-зу Ловина)
 6. Н.В. Петрова, И.П. Николаев, Романова, Шмальгаузен. Э-во и магнетизм. Практик. задания по физике для студентов-математиков, 2-го к-та III (по р-зу Макарова)
 7. И.И. Анисов, Дегенко, Майков. Механика решения γ -р по э-во
 8. М.Н. Брандт, Миронова, Савельев. Электростатика в вопросах и γ -зах, ответы по решению γ -р для студентов

Юлия Минина 2015

Лекция I

$$e = 1,6021892 \dots \cdot 10^{-19} \text{ кулон}$$

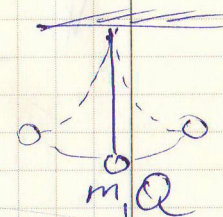
измерение заряда

Резонансный метод

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{qE}{m} \cos \omega t$$

$$\omega_0 \approx \omega$$

$$y_{\max} \approx \frac{qE}{2\delta m \omega}$$

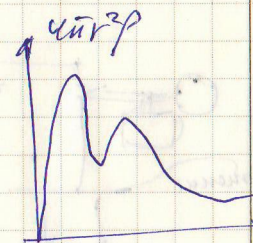
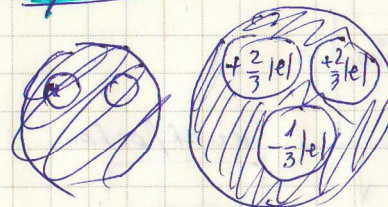


q

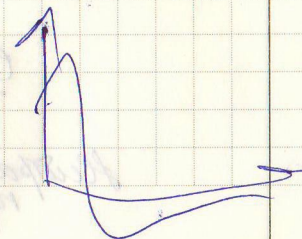
$$E_0 \cos \omega t$$

$$m\epsilon^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi + E_0 l \cos \omega t \cos \varphi$$

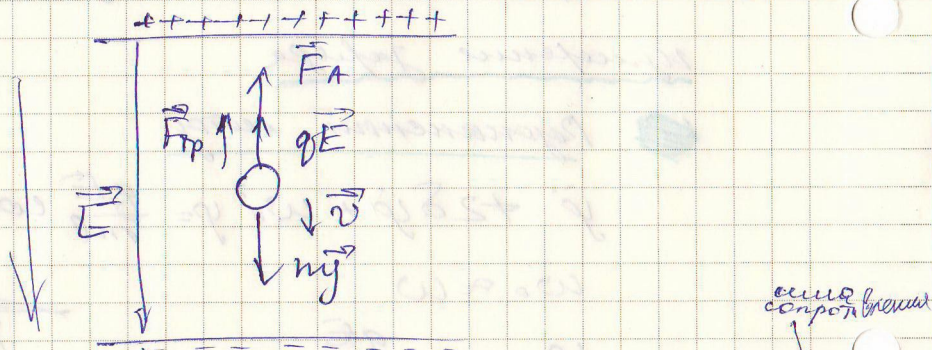
Протон



Нейтрон



Опыт Милликовского (1909)



$$-\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - qE + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - dV = 0$$

$$-\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - dV_1 = 0$$

$$-\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - qE + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - dV_2 = 0$$

$$\Delta q_{\min} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$



$$\frac{C_+ - C_-}{C_{\pm}} \leq 10^{-21}$$

Нейтральность отдельных атомов
проверялась экспериментально

Закон сохранения заряда

1. Э-ны и протоны - частицы с бек. временем жизни, их заряды гев при переходе от одной ЦСК к другой и не зависят от скорости.

2. При χ процессе взаимопревращения частиц их суммарный заряд до взаимоп-я равен суммарному заряду после взаимоп-я.

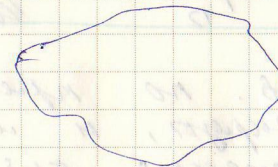
$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \oint_{S_0} \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \oint_{V_0} \rho dV = \oint_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\oint_{S_0} \vec{j} \cdot d\vec{s} = \oint_{V_0} \text{div} \vec{j} dV$$

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$



$$\Delta Q = \rho \quad ??$$

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \rho(\vec{r}, t)$$

ΔV - нек. малый объем
(в произв. смысле)

плотность
заряда

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}$$



Закон Кулона

Два некот. точечных заряда q_1 и q_2
(заряд тела, радиус $\ll$ радиус сферы
по сравнению с радиусом сферы
наблюдения), в ВКО взаимодействуют
силой, прямо $\propto$ величинам
зарядов и обратно $\propto$ квадрату
расстояния r_{12} между
ними

Силы, с кот q_1 действует на заряд q_2 :

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}$$

Она направл. по прямой,
соед. заряды, и отв. силой
притяжения для разноименн.

зарядов и отталкивания для
одноименных

($\vec{r}_{12}$ напр. от q_1 в сторону
 q_2)

коэфф. пропорц. - k

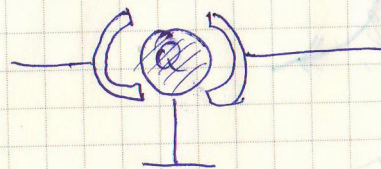
В СИ

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$$

$$F \sim \frac{r}{r^{3+d}}$$

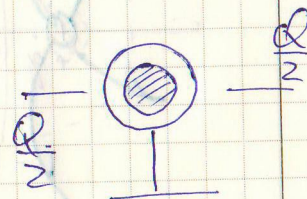
~~Теорема Кавендиша~~



~~Теорема~~

Теорема Кавендиша

все перемещенное



$$|\alpha| \leq 0,02$$

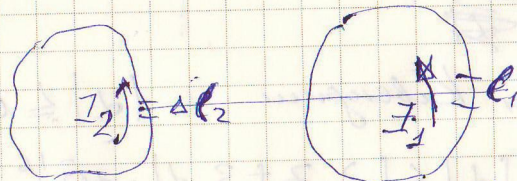
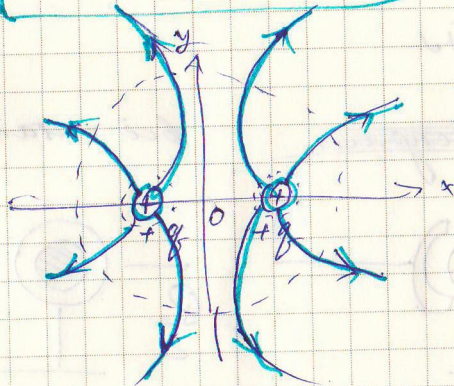
$$|\alpha| \leq [2,7 \pm 3,1] \cdot 10^{-16} \quad (1971)$$

Законы электростатики

1. Сила взаимод-ия 2х точечных зарядов не меняется в присутствии 3-го
2. Сила, дей-я на точечн. заряд со стороны 2х точ. зарядов, равна Σ сил, действ-х на него со стороны каждого из точ. зарядов.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

напряженность эл. поля

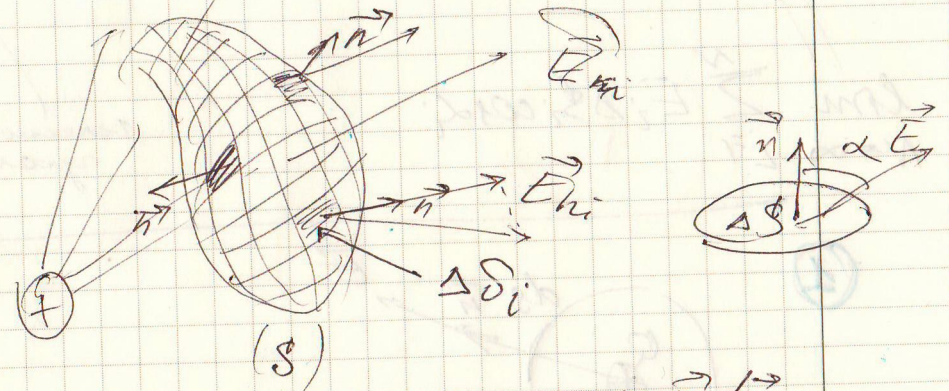


$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{I_1 I_2 \Delta l_1 \Delta l_2}{r^2}$$

$$I = M^{1/2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'$$



$$\vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} dS$$

Канонич. вектор момент электрич. диполя и
в нем момент электрич. диполя

$$E \Delta S \cos \alpha$$

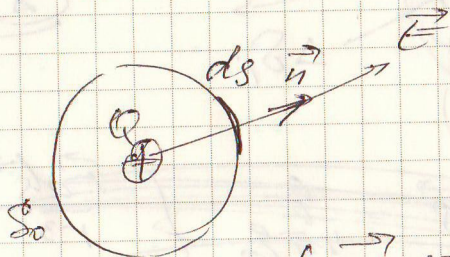
$$\oint_{S_0} \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_0} \frac{\vec{r} d\vec{s}}{r^3} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_0} \frac{d\vec{s}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_0} d\Omega$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N E_i \Delta\Omega_i \cos\alpha_i$$

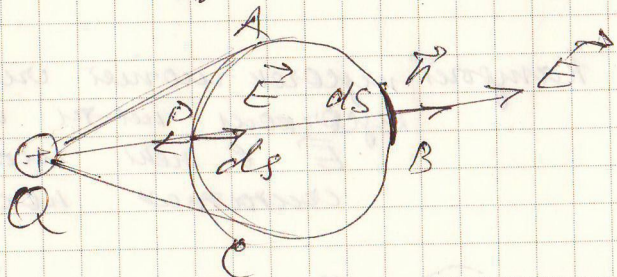
переходим
к пределу

①



$$\oint_{S_0} \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_0} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

②



$$\oint_{S_0} \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{ABC} d\Omega - \int_{ADC} d\Omega \right] = 0$$

Норму в $\sqrt{\text{напр-ты}}$ $\sqrt{\text{зависит от геометрии}}$ $\sqrt{\text{пов-ти}}$,
равен $\Sigma \text{зар.} / \epsilon_0$ &

там же, куда он входит
пов-ти, и 0, если нет

$$\oint_{S_0} \sum_{i=1}^N \vec{E}_i d\vec{s} = \oint_{S_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \vec{r}_i d\vec{s} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \oint_{S_0} \frac{\vec{r}_i d\vec{s}}{r_i^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \oint_{S_0} d\Omega_i =$$

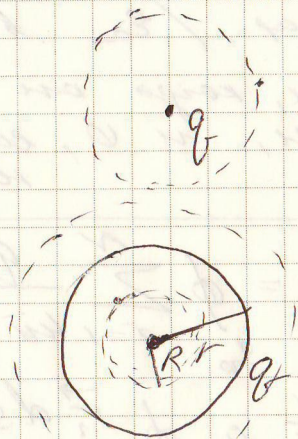
$$= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

теорема Гаусса

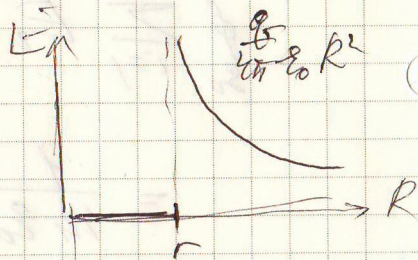
$$\oint_{S_0} \vec{E} d\vec{s} = \int_V \text{div } \vec{E} dV =$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z)$$

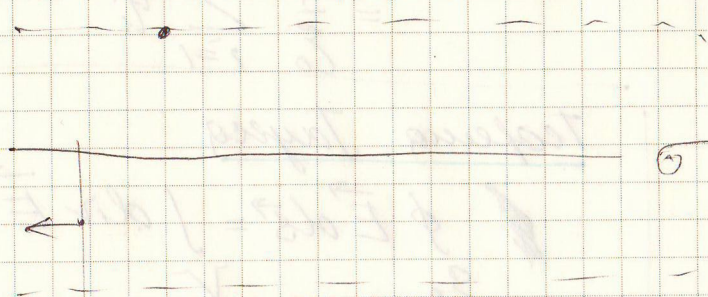


$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$E \cdot 4\pi R^2 = 0$$

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$2ES = \frac{QS}{\epsilon_0} \leftarrow \text{paper}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Опр Цикл най пот, если ее работа
вдоль $\forall$ замкн. траектории
 $= 0$

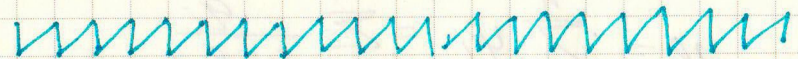
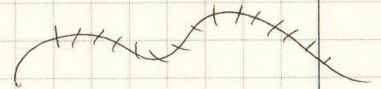
Курноверие сити пот

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N F_i \Delta l_i \cos \alpha_i$$



Век-во

$$\text{rot}(\alpha \vec{a}) = \alpha \text{rot } \vec{a} + [\text{grad } \alpha \times \vec{a}]$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

$$\text{rot}\left(\frac{1}{r^3} \vec{r}\right) = \frac{1}{r^3} \text{rot } \vec{r} + [\text{grad } \frac{1}{r^3} \times \vec{r}] = 0$$

$$\text{rot } \vec{E}_i = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = \sum_{i=1}^N \text{rot } \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \text{rot } \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^3} = 0$$

copybook

$$-\text{grad} \left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \right) = \frac{q_i \vec{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} = \vec{E}_i$$

$$\Rightarrow \vec{E}_i = -\text{grad } \varphi_i, \text{ где}$$

$$\varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = -\sum_{i=1}^n \text{grad } \varphi_i =$$

$$= -\text{grad} \sum_{i=1}^n \varphi_i =$$

$$= -\text{grad} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

Этот потенциал — работа по перемещению единичного заряда на бесконечное расстояние

$$\varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \int_{r_i}^{\infty} \vec{E}_i \cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_i} \int_{r_i}^{\infty} \frac{dr_i}{r_i^2}$$

не обязательно как-то вводить.

Итерация:

copybook

$$\int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} dx = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \Big|_r^{\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\text{div } \vec{E} = -\text{div grad } \varphi = -\Delta \varphi = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Каждо гок, что это φ — имеет тот самый смысл

Этот потенциал

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Этот потенциал

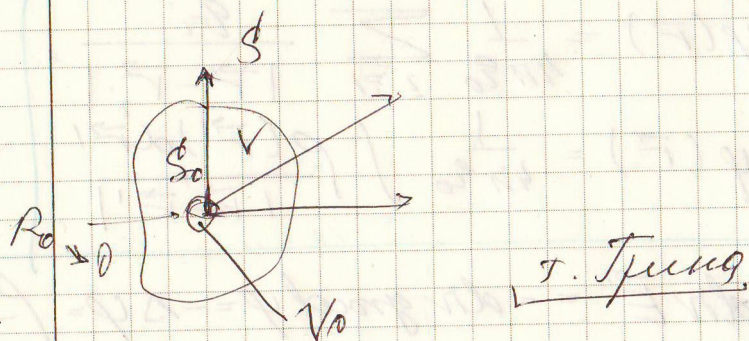
$$\Delta \varphi(\vec{r}) = 0$$

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Решение уга-д:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Найдём по-т-н в V за канал
справедливо $\rho = 0$ $\nabla^2 \varphi = 0$.



$$\int_{V-V_0} (\varphi \Delta \varphi - \varphi \Delta \varphi) dv =$$

$$= \oint_{S+S_0} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds$$

Возьмём $\varphi = \frac{1}{r_1} \Rightarrow \Delta \varphi = 0$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{V-V_0} \frac{1}{r_1} dv =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \oint_{S+S_0} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right) ds$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_V \frac{1}{r_1} dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{V_0} \frac{1}{r_1} dv =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right) ds +$$

нефизическая
близость

$$+ \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right) ds$$

берём

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) \Big|_{R_0} = \left[-\frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right]_{r_1=R_0}$$

$$= \frac{1}{R_0^2}$$

~~R_0 \rightarrow 0~~
 $R_0 \rightarrow 0$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right) ds =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left(\frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial \varphi}{\partial r_1} \right) ds =$$

= $\left\{ \begin{array}{l} \text{elliptический интеграл} \\ \text{Т. Рундус} \end{array} \right.$

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) :$$

$$\int_S f(x, y) = f(\xi)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\tilde{\varphi}}{R_0^2} + \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r_1} \right) \right) \oint_{S_0} \phi ds =$$

$$= -\tilde{\varphi} + R_0 \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r_1} \right) \xrightarrow{R_0 \rightarrow 0} \tilde{\varphi}$$

$= 4\pi R_0^2$

Эле 3 ун-на.

$$\frac{1}{4\pi} \oint \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right) ds :$$

System $R \rightarrow \infty$

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi \propto \frac{C}{R}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} \propto \frac{C}{R^2}$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{S \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right) ds =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{C_2}{R^3} + \frac{C_1}{R} \frac{1}{R^2} \right) \oint_{S \rightarrow \infty} \phi ds =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{C_2}{R} + \frac{C_1}{R} \right) = 0$$

$\frac{1}{4\pi R^2}$

Эле 2 маненхуу ун-на

$$-\frac{1}{4\pi} \epsilon_0 \oint_V \frac{f_i}{r_i} dv =$$

$$-\frac{1}{4\pi} \epsilon_0 \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_V \frac{f_i}{r_i} dv =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \epsilon_0 \oint_V \frac{f_i}{r_i} dv$$

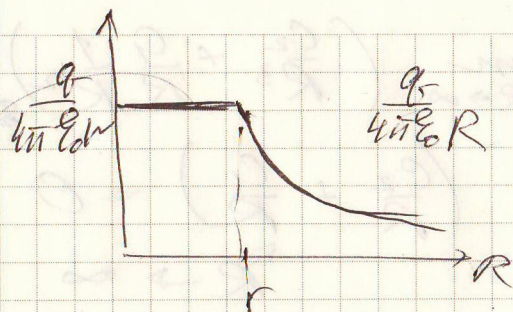
$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \oint_V \frac{f_i}{r_i} dv = \{ \text{та т.} \} =$$

$$= \frac{\rho}{4\pi \epsilon_0} \oint_V \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}{r^1} =$$

$$R_0 \rightarrow 0. \quad = \frac{\rho R_0^2}{2 \epsilon_0} \xrightarrow{R_0 \rightarrow 0} 0$$

Одэгүүлнүүл нэмж. бр-с,
нэмгэсэн

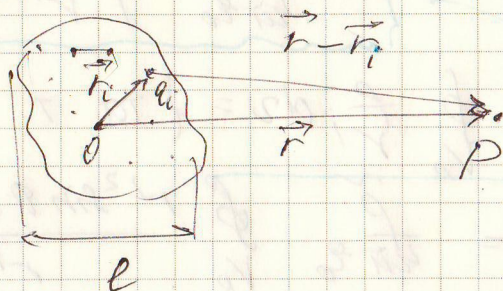
как раз это $\checkmark$



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- потенциалы

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

принцип суперпозиции

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \left\{ \frac{1}{r} - \sum_{\alpha=1}^3 k_{i\alpha} \right\}$$

$$\begin{cases} x_{i1} = x_i \\ x_{i2} = y_i \\ x_{i3} = z_i \end{cases}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 k_{i\alpha} k_{i\beta} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0} +$$

$$+ \dots \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r}$$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^3 q_i x_{i\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0}$$

Если нейтральная система $\Rightarrow \varphi_0 = 0$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^3 q_i x_{i\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{i=1}^n q_i x_{i\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0} \quad \text{copybook}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^3 d_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0} \neq 0$$

$$\left\{ -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\vec{d} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right\}$$

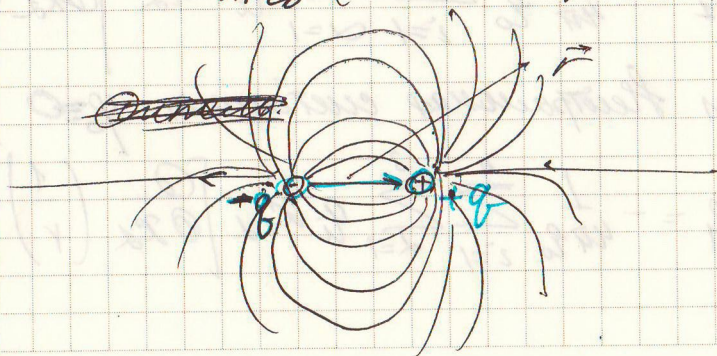
Ориентированная масса

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \left(\frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} \text{grad}(\vec{d} \cdot \vec{r}) + (\vec{d} \cdot \vec{r}) \times \text{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} \vec{d} - \frac{3\vec{r}}{r^5} (\vec{d} \cdot \vec{r}) \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\vec{r}(\vec{d} \cdot \vec{r}) - \vec{d}r^2}{r^5} \right)$$



copybook

$n=2$

$$\vec{d} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i$$

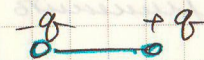
$$\vec{d} = q\vec{l}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n q_i x_{i\alpha} x_{i\beta}$$

фактически характеризует ион.

$$\varphi_2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 Q_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0}$$

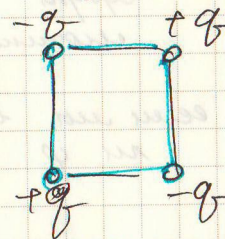
φ_1
диполь



$$d = \sum q_i r_i$$

$$E \sim \frac{1}{r^3}$$

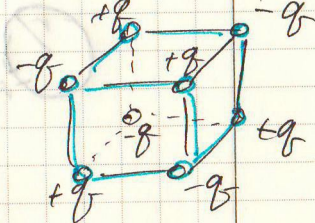
φ_2
квадруполь



$$E \sim \frac{1}{r^4}$$

$$d=0$$

φ_3
октауполь



$$E \sim \frac{1}{r^5}$$

Энергия взаимодействия 2х т.зар.

$$W' = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}} = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1' + q_2 \varphi_2')$$

Энергия заряда

$$W'' = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \Delta q_i \varphi_i' = \frac{1}{2} \oint \rho \varphi \, d\vec{r}$$

Энергия системы зарядов

$$W = W' + W'' = \frac{1}{2} \oint \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) \, d\vec{r}$$

$r \rightarrow 0, \neq 0.$



сфера.

можно применить ф.л.?

если мы не знаем, вер-
но φ $\vec{E}$ -но применимо.
($\Rightarrow \varphi_{\text{ср}}$)

$$\int \text{div } \vec{a} \, dv = \oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{a} = \varphi \text{ grad } \varphi \quad \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{div } \Delta \vec{b} = \Delta \text{div } \vec{b} + \vec{b} \cdot \text{grad } \Delta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_V [\varphi \Delta \varphi + (\nabla \varphi)(\nabla \varphi)] \, dv &= \\ &= \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS \end{aligned}$$

$$\int_V (-\varphi \frac{\rho}{\epsilon_0} + E^2) \, dv = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS$$

$\downarrow \rightarrow 0$
 $V \rightarrow \infty$

$\varphi \sim \frac{1}{r}$ (т.к. не одн. эл. центр)

$$W = \frac{1}{2} \oint \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) \, d\vec{r} = \left[\frac{\epsilon_0}{2} \oint E^2(\vec{r}) \, d\vec{r} \right]$$

$$\boxed{\text{grad } \varphi = -E}$$

$\frac{\epsilon_0}{2} E^2(\vec{r})$
мощность
электрического
поля

Переходим от скалярного к векторному

$$U = \sum_{i=1}^n q_i \varphi = \sum_{i=1}^n q_i [\varphi(0) + r_i (\text{grad } \varphi(0))_i +$$

$$+ \dots = \underbrace{Q \varphi(0)}_{\substack{\rightarrow 0 \text{ при} \\ \text{центр. симметрии}}} - \vec{E}(0) \vec{d} + \dots$$

$$\vec{F} = -\text{grad } U = \text{grad } (\vec{E} \cdot \vec{d})$$

$$\text{grad } (\vec{E} \cdot \vec{d}) = \underbrace{[\vec{d} \times \text{rot } \vec{E}]}_{\rightarrow 0} +$$

$$+ \underbrace{[\vec{E} \times \text{rot } \vec{d}]}_{=0} + \underbrace{(\vec{E} \nabla) \vec{d}}_{=0} +$$

$$+ (\vec{d} \nabla) \vec{E}$$

$$\vec{F} = (\vec{d} \nabla) \vec{E}$$

Наше уравнение скал.-мат., соот. из
от. скалярного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \text{div } \rho_m \vec{v} = 0$$

$$\text{div } \vec{E}_m = \frac{\rho_m}{\epsilon_0}$$

$$\text{rot } \vec{E}_m = 0$$

$$\bar{f} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{V_0} \int_{V_0} f_m dV dt$$

Будем усреднять по нек.
малому объему ...

Средн. мал. f_m скаляр в соотв $\bar{f}$

V_0 - нек. мал. объем в гн. см.,
в мат. смысле не ~~с~~
стремится к 0

T - от. мал. промежут. вр.,
но $\bar{f}$ по большому времени
перекр. область с ± 1 раз на $2T$

И. наше в среде

$$\left[\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div } \bar{j} = 0 \right], \quad \begin{aligned} \bar{\rho}_m &= \bar{\rho} \\ \bar{j} &= \rho_m \vec{v} \\ \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\text{где } \bar{\rho}_m = \bar{\rho},$$

$$\bar{j} = \rho_m \vec{v},$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad \vec{E} = \vec{E}_m$$

$$\bar{\rho} = \rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{связ}}.$$

Проводники:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

переход 2-го
ранга, если
среда анизотропна

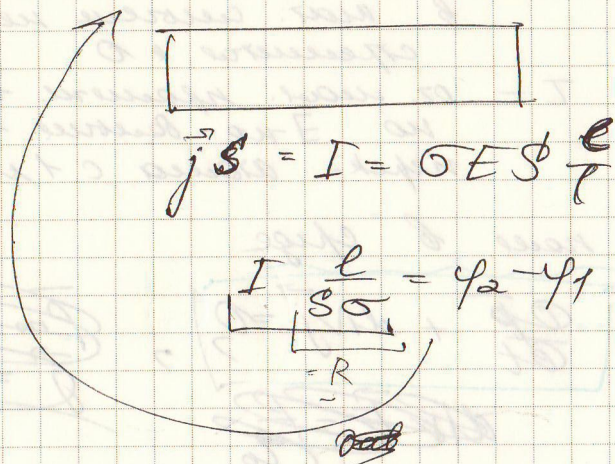
закон Ома в дифференциальной
форме

~~Внутри проводника~~

$$\vec{j} = \vec{j}(E) = j_0 + \alpha E + \beta E^2$$

$\neq 0$

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = IR$$



Электростатическое поле проводника

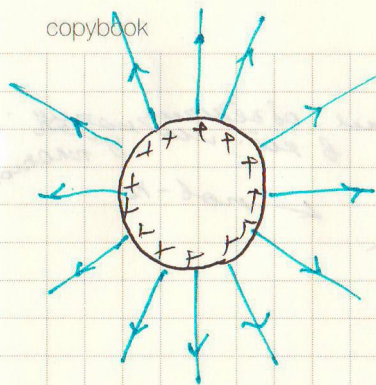
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0 = \operatorname{div} \sigma \vec{E} =$$

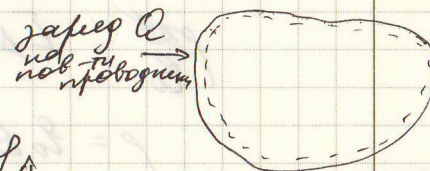
$$= \sigma \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho$$

$$\Rightarrow \rho = 0$$

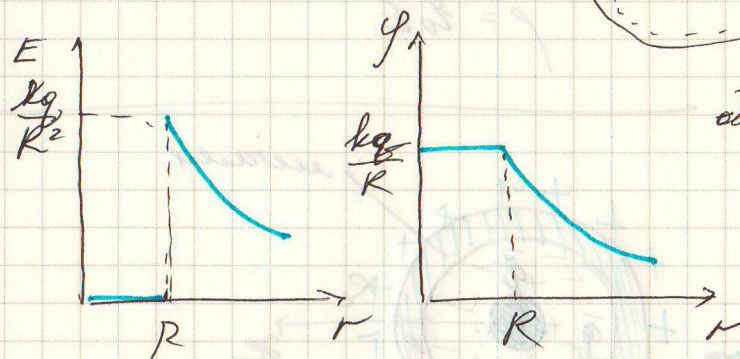
Проводник — ГМ одинаково потенциал



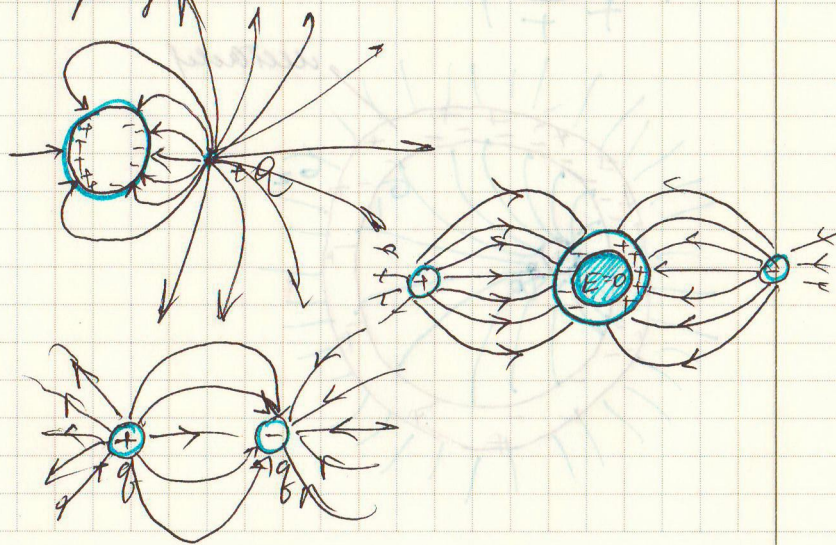
в V . Внутри проводника поле $= 0$, т.к. иначе возм. ток $\Rightarrow j \neq 0!$



расп. так, чтобы потенциал внутри $= 0$



Проводники в электр. поле

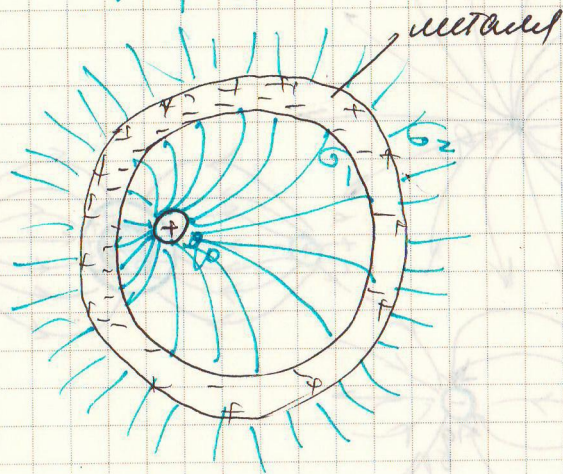
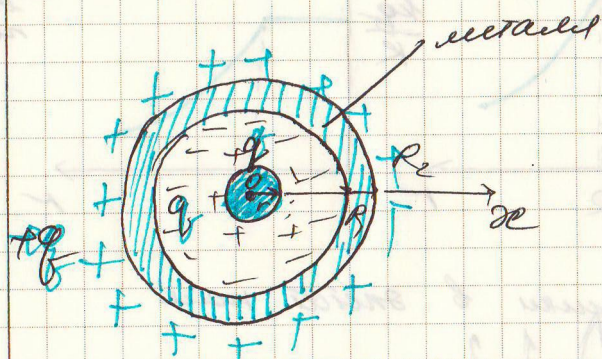
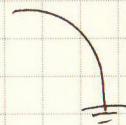


Плотность заряда

мал. элемент, который
в к-де. для учета
плотности
← $\vec{n}$ - $\vec{n}$

$$\frac{\rho_{\text{зв}}}{\epsilon_0} = E \Delta S$$

$$\rho = \epsilon_0 E$$

Заземление

[соединение с проводником
внешнего радиуса,
разреш. прикос
внешнего заряда
- такое, чтобы потенциал
= 0]

$$\varphi_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2$$

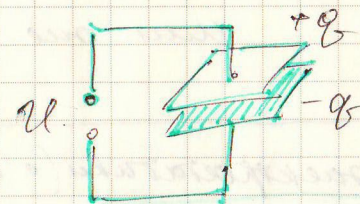
$$\varphi_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2$$

$$q_1 = C_{11} \varphi_1 + C_{12} \varphi_2$$

$$q_2 = C_{21} \varphi_1 + C_{22} \varphi_2$$

$$Q = C_{11} \varphi_1 + C_{12} \varphi_2$$

$$-Q = C_{21} \varphi_1 + C_{22} \varphi_2$$



$$\frac{|Q|}{|\varphi_1 - \varphi_2|} = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}} = C$$

$C_{12} ??$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} q_i q_j$$

copybook

$$W_{\text{конденсатора}} = \frac{q^2}{2C}$$

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\frac{\sigma S}{\epsilon_0 \epsilon_0 d}$$

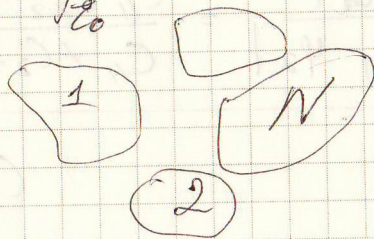
$$\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 S d$$

полн. энергия
пот и поляризации
открыт

или не так
вскр.

Все 7-ми электростатика (с пот. φ)

$$\Delta \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



copybook

1. Задача φ каноническая
2. Задача ~~каноническая~~ суммарная
задача каноническая

Они имеют 1 решение:

Реш

Предп., что 2 гда реш-я φ_1, φ_2

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad \Delta \varphi = 0 \quad (\text{и } \Delta \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0})$$

нулевые потенциалы проводника

$$\int d\vec{r} \vec{a} d\vec{r} = \oint \vec{a} d\vec{s}$$

$$\vec{a} = \text{grad } \varphi$$

$$d\vec{r} \cdot \vec{a} = d\vec{r} \cdot \vec{b} + b \text{ grad } L$$

$$\int [\varphi (\Delta \varphi) + (\nabla \varphi)(\nabla \varphi)] d\vec{r} =$$

$$\int 0 = \oint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\vec{s}$$

$$\int (\nabla \varphi)^2 d\vec{r} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

в кан. ве
пот-н
берем
сферу

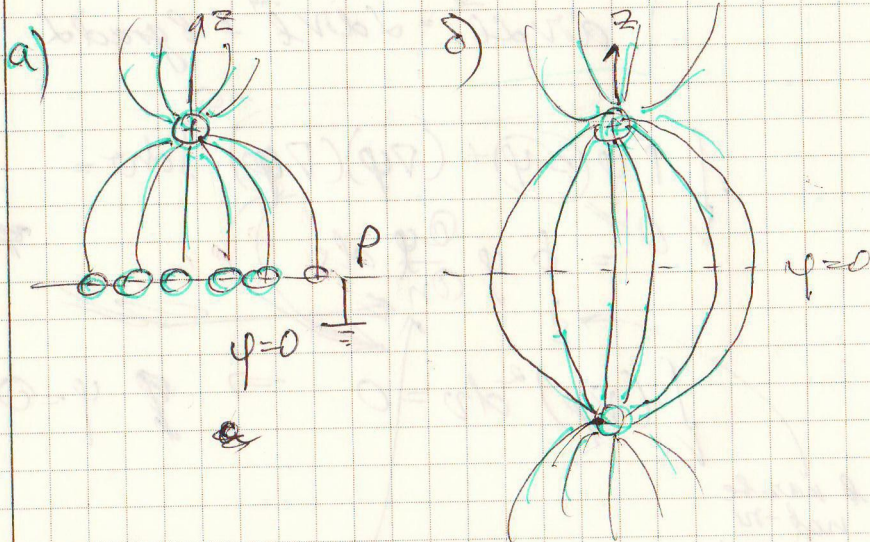
если у нас есть
 φ_1 и φ_2 одинаковые,
то φ - кон.
где φ равно 0.

copybook

$$E_{\text{ext}} = \frac{\sigma \Delta s}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \varphi \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \approx \varphi \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0$$

здесь тоже не выполняется
условие из-за геометрии



$$\psi = -q \delta \frac{(z-a)}{\epsilon_0}$$

$$\psi(x, y, z=0) = 0$$

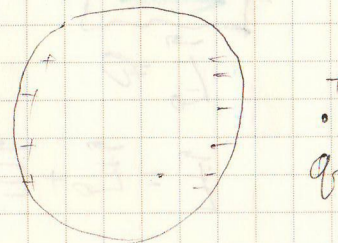
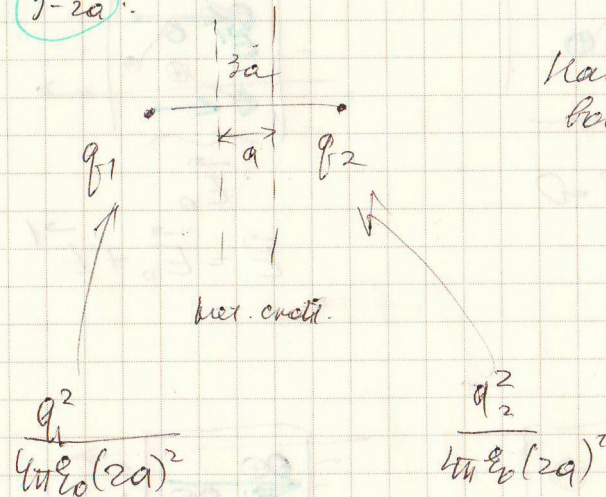
copybook

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}} \right]$$

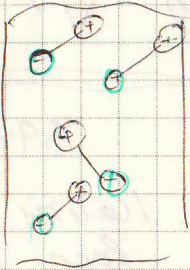
$q_1, q_2 < 0$

$q_1, q_2 < 0$

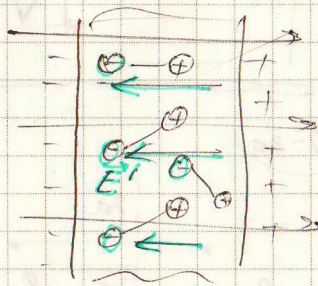
Найти потенциал,
вектор $\vec{E}$ в точке $K(x, y, z)$



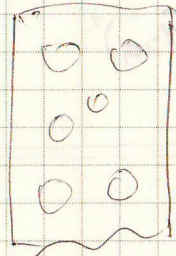
Диэлектрики



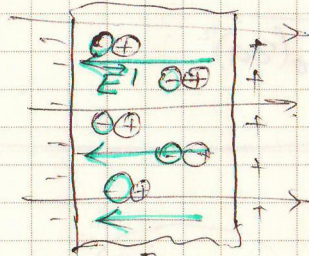
$$\vec{E} = 0$$



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$



$$\vec{E} = 0$$



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

Зн. поле в диэлектриках

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{rot} \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_m$$

$$\vec{P} = \text{polariz}$$

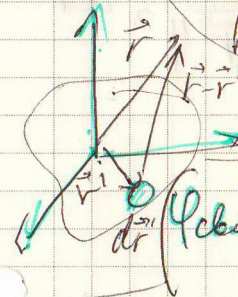
$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\vec{P} = f(\vec{E}) - \text{непрерывная связь}$$

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\text{polariz} = -\text{div} \vec{P}$$

$$(\vec{j} \text{ и } \vec{P} \text{ в } \vec{E} \text{ и } \vec{D})$$



Значит, что
группа не
но $\vec{r}$
а $\vec{r}'$!

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\text{div}(\vec{P}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' +$$

$$+ \oint \frac{\rho_n dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

гравитациям 0 век в
такой форме,
на сфере век. д. рас.
 $\rho_n = 0$

$$\textcircled{E} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\text{div}' \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' + \int_V \text{div}' \left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\vec{r}' =$$

+ Tagena

$$= \int_V \text{div} f \vec{a} = f \text{div} \vec{a} + \text{grad} f \cdot \vec{a},$$

$$f = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \vec{a} = \vec{P} \quad f =$$

группировка

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P}(\vec{r}') \text{grad}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\vec{r}' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P}(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'$$

(гр. сферич.,

$$\varphi_{\text{без}}(\vec{r}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{d}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'$$

Значит, эти два выражения равны:

$$\Rightarrow \vec{d} = \vec{P}$$

$$\vec{d} = \int_V \rho_{\text{без}}(\vec{r}') \vec{r}' d\vec{r}' = \int_V \vec{P} d\vec{r}'$$

copybook

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{rot} \vec{E} = 0$$

$$\vec{P} = \rho_{\text{без}} + \rho_{\text{без}} = \rho_{\text{без}} - \text{div} \vec{P}$$

$$\epsilon_0 \text{div} \vec{E} = \rho_{\text{без}} - \text{div} \vec{P}$$

Введем $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \hat{E}$

б-р эквив. системы

Тогда

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{без}}$$

и т. Tagena имеет вид:

$$\int_V \vec{D} d\vec{S} = Q_{\text{без}}$$

тензор

Ваккуум

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Диэлектрик

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \hat{E} \vec{E}$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi$$

$$\text{div} \epsilon_0 \hat{E} \text{grad} \varphi = \rho$$

Уравнения Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\vec{D}_2 - \vec{D}_1 = 0$$

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = 0$$

~~Уравнения Максвелла~~

для

$$\vec{D}_2 - \vec{D}_1 = 0$$

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = 0$$

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D}_{1,2} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_{1,2} = 0$$

2 нукл.

$$\Rightarrow \vec{D}_2 - \vec{D}_1 = \vec{D}, \quad \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \vec{E}$$

↑
общий
уравн.
уравн.
уравн.

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\left[\vec{D}, \vec{E} - \text{уравн. Максвелла} \right]$$

и уравн. для $\vec{p} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \vec{p}$

$$\int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \int_V \vec{D} \operatorname{grad} \varphi dV =$$

$$= - \int_V \operatorname{div} (\varphi \vec{D}) dV + \int_V \varphi \operatorname{div} \vec{D} dV =$$

$$= - \int_{S_0} \varphi \vec{D} \cdot d\vec{S} \rightarrow 0$$

↑
т.к. $\vec{D}_n = 0$
уравн. Максвелла
уравн.

⇒ уравн. Максвелла

Уравнения Максвелла

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int \varphi \operatorname{div} \vec{D} dV$$

$$\left\{ \operatorname{div} \vec{p} = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{grad} \vec{p} \right\}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} \varphi \vec{D} dV - \frac{1}{2} \int_V \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{D} dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{S_0} \varphi \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

copybook

Сила q -а на проводник в
внешнем поле

$$\vec{P} = (\vec{d} \text{ grad}) \vec{E}$$

$$\vec{P} = \int_{V_0} \vec{f} dV = \int_{V_0} (\vec{P} \text{ grad}) \vec{E} dV$$

$$\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\boxed{f = \epsilon_0 (\epsilon - 1) (\vec{E} \cdot \text{grad}) \vec{E}}$$

Потенциал энергии ток в
проводнике

$$\vec{j} = \text{const} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{j} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} \\ \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

проводник
не
заряд!!



$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \sigma \vec{E} \\ \sigma E \int \frac{S}{S} & \\ \int S &= I \end{aligned}$$

$\Rightarrow \rho = 0$
нет энергии
проводника

copybook

$\Rightarrow$

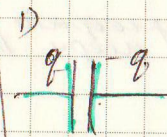
мним ток в
замкнутой

$$\vec{j}_m = \vec{j}_{2n}$$

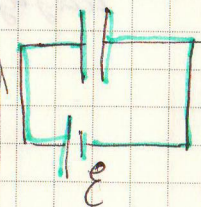
$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 \frac{1}{\sigma} \vec{j} d\vec{l} = \frac{1}{\sigma} \int_1^2 \vec{j} d\vec{l} = \\ &= \frac{1}{\sigma S} \int_1^2 \vec{j} d\vec{l} = \frac{1}{\sigma S} I L = I R_{12} \end{aligned}$$

замена, описания

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q d}{\epsilon \epsilon_0 S}$$



2)



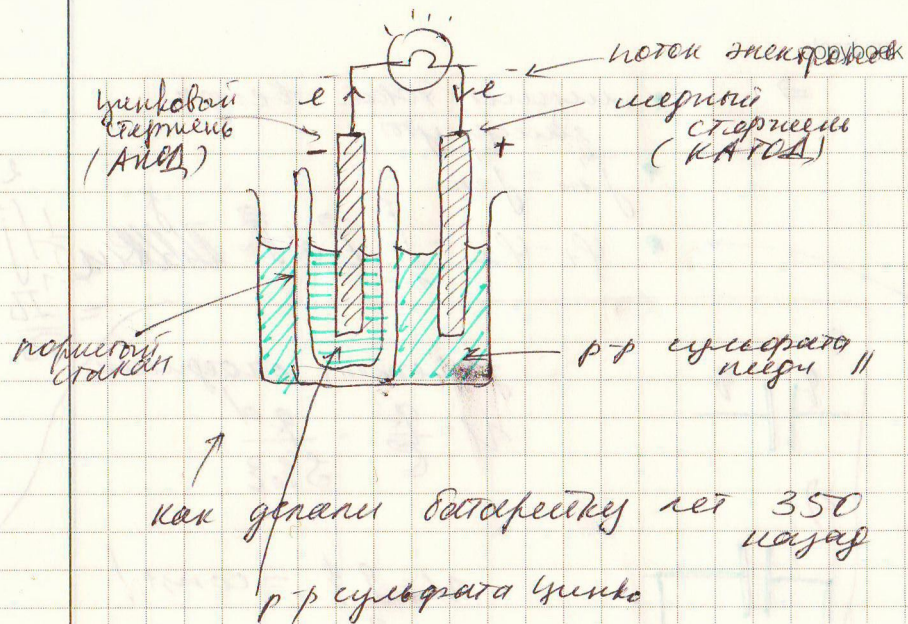
$$U = \mathcal{E} \oint = \text{const!}$$

ток $\vec{j}$ в проводнике

ток замкнутой цепи

$$\begin{aligned} \oint (\vec{E}_{\text{нар}} + \vec{E}_{\text{вп}}) d\vec{l} &= \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} = \\ &= I R_{12} \end{aligned}$$

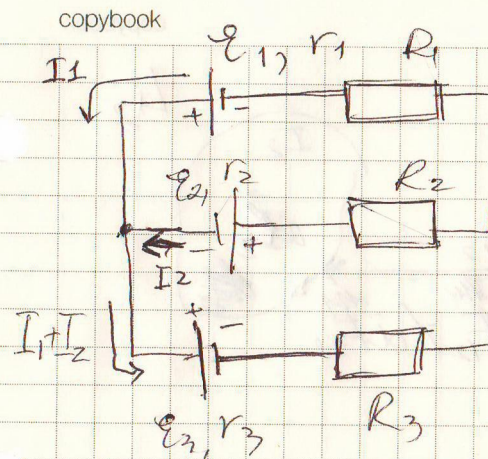
непотенциальный
хар-р



Правила Кирхгофа

- Алгебра. $\sum$ всех токов, втекающих в узел, равна 0
- Для N контур алгебр. $\sum$ падений напряжений на его эл-тах равна алгебр. $\sum$ ЭДС действующих в этом контуре

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} = I_{12} R_{12}$$



$$\begin{aligned} \{I_1, \} \{I_2, \} \\ \Rightarrow I_1 + I_2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -I_2 r_2 - I_2 R_2 + I_1 R_1 + I_1 r_1$$

$$\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = (I_1 + I_2) r_3 + (I_1 + I_2) R_3 + I_1 r_1 + I_1 R_1$$

Закон Джоуля-Ленца

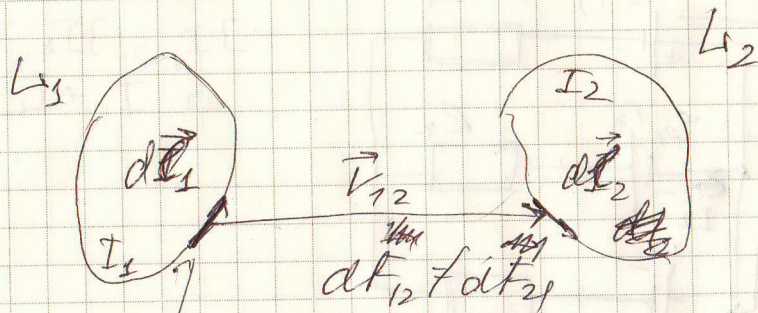
$$W = I^2 R$$

Закон Ампера

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{12}^3} [d\vec{\ell}_2 \times [d\vec{\ell}_1 \times \vec{r}_{12}]]$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{A}^2}$$

copybook



банков
ука.

Этот кусочек
мощности
обладает
отрицательным!

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{[d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}]]}{r_{12}^3}$$

$$\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12}$$

Углубим магнитное поле

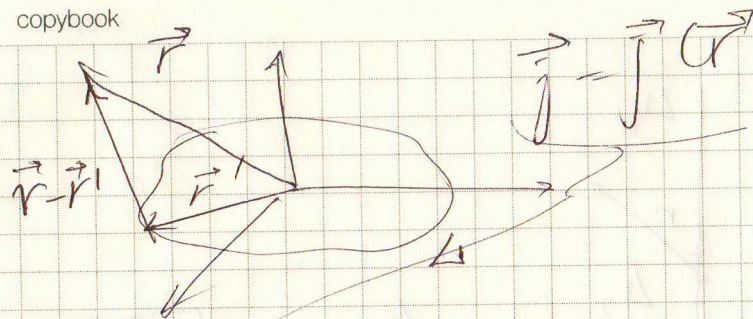
$$d\vec{F}_{12} = I_2 [d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_{12}],$$

$$\text{где } d\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 [d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}]}{4\pi r_{12}^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

- углубим еще.

copybook



В векторизации:

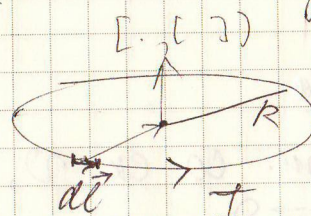
Здесь такое же векторизация,
т.к. для каждого по величине
проборы с маленькими
контуром $\vec{r}$ и $\vec{r}'$.

$$I d\vec{l} \equiv j dv$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} =$$

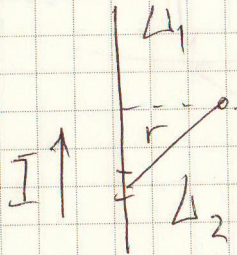
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[j(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'$$

- j - n Бю-Лаплас-Лаплас
АХАХА АХАХА



$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{\mu_0 I r \Delta l_i}{4\pi r^3}$$

$$\frac{\mu_0 I}{2r}$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{L_2}^{L_1} \frac{dz \sqrt{r^2 + z^2}}{\sqrt{r^2 + z^2} (r^2 + z^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left\{ \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + r^2}} + \frac{L_2}{\sqrt{L_2^2 + r^2}} \right\}$$

получаем $\vec{F} = I \oint_L [d\vec{l} \times \vec{B}]$

$I d\vec{l} \rightarrow \vec{j} dv \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = \oint_V [\vec{j}(\vec{r}-\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}-\vec{r}')] d\vec{r}'$

Сила Лоренца

зар. q , гл.м. со эк. v , то

$$\vec{j} = q \vec{v} \delta$$

δ -ф-я, т.к. это δ

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \oint_V [\vec{v} \delta(\vec{r}-\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}-\vec{r}')] d\vec{r}' =$$

$$= q [\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})]$$

Сила Лоренца

перпендикулярна скорости!
и совершает
никакой работы!
перемещение
коммутативно v ,
так $2v$ не, не, не!

Векторный потенциал

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}?$$

Да, ~~так~~ $\Rightarrow \text{rot } j\vec{a} = j \text{rot } \vec{a} + [\text{grad } j \times \vec{a}]$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V [\text{grad} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \times$$

$$\times \vec{j}(\vec{r}')] d\vec{r}' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')] d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} =$$

$$= \vec{B}(\vec{r})$$

$$\text{rot } \vec{j}(\vec{r}') = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = \text{div rot } \vec{A} = 0.$$

Обуча:

$$\bullet \text{ div } \vec{A} = 0:$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{div} \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{j_n(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0 \end{aligned}$$

$$\bullet A_{sc}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_{sc}(\vec{r}') d\vec{r}'}{r - r'}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') d\vec{r}'}{r - r'} \Leftrightarrow \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}'}{r - r'} \Leftrightarrow \Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

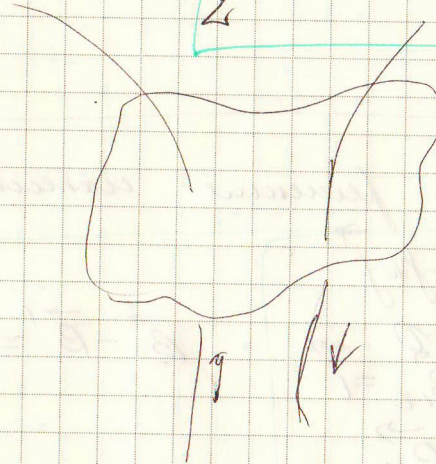
$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} &= \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \\ &= -\Delta\vec{A} = -\Delta\vec{A} - \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

что
образуется
так A_z
что это 0

$$\text{r.e. } \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\int_{S_0} \text{rot } \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \int_{S_0} \vec{j} dS$$

$$\Rightarrow \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k$$



на эту поверхность
направление
не то

Почему смена упр-и год
направлений м. Б.

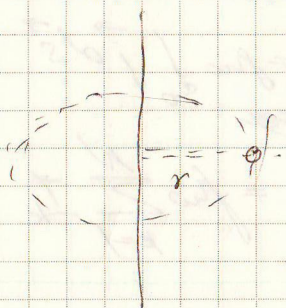
$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Упрощение упр-и:

$$\vec{B}_{2\tau} - \vec{B}_{1\tau} = \vec{e}_\tau$$

$$\vec{B}_{2n} = \vec{B}_{1n}$$



$$\vec{B} \cdot \vec{a} \vec{r} =$$

Сформулируем следующие уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ B_{2z} - B_{1z} &= 1 \\ \vec{B}_{2n} &= \vec{B}_{1n} \end{aligned}$$

$$\vec{B} - \vec{B}' = \vec{B}''$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}'' = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B}'' = 0$$

$$B''_{2z} - B'_{1z} = 0$$

$$\vec{B}''_{2n} = \vec{B}''_{1n}$$

$$\operatorname{div} [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b}$$

$$\int \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} \, dv = \int \operatorname{div} [\vec{a} \times \vec{b}] \, dv + \int \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b} \, dv$$

$$\vec{b} = \vec{B}'', \vec{a} = \vec{A}'', \vec{B}'' = \operatorname{rot} \vec{A}'', \operatorname{rot} \vec{B}' = 0$$

$$\begin{aligned} \int_V \vec{B}'' \cdot \vec{B}' \, dv &= \int_V \operatorname{div} [\vec{A}'' \times \vec{B}'] \, dv = \\ &= \int_S [\vec{A}'' \times \vec{B}']_n \, dS \Rightarrow 0 \end{aligned}$$

Векторы потенциалов ст. тока на основании равенств

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \, d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots$$



$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_0(\vec{r}) + \vec{A}_1(\vec{r}) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \vec{j} \, d\vec{r}' +$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \vec{j} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \, d\vec{r}'$$

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \vec{j} \, d\vec{r}' = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

$\vec{a}$ - вектор $\Rightarrow$

$$\int_V \{ \vec{j}(\vec{r}') + \vec{r}'(\vec{j} \cdot \vec{r}) \} d\vec{r}' = 0$$

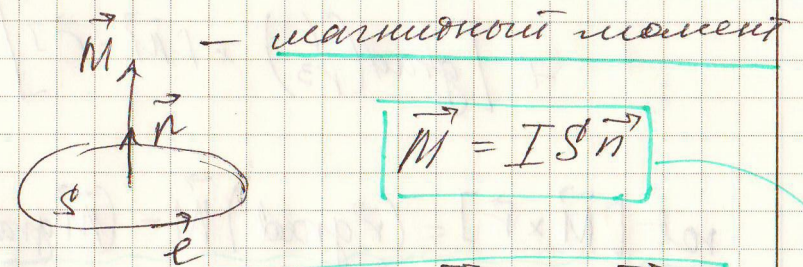
$$\begin{aligned} \vec{A}_1(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{8\pi r^3} \int_V [(\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \times \\ &\times \vec{r}] d\vec{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{r}] d\vec{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3} \right], \end{aligned}$$

где $\vec{j}(\vec{r}') = \frac{1}{2} [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')]]$

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \int_V \vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}' = \\ &= \frac{1}{2} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}] d\vec{r}' \end{aligned}$$

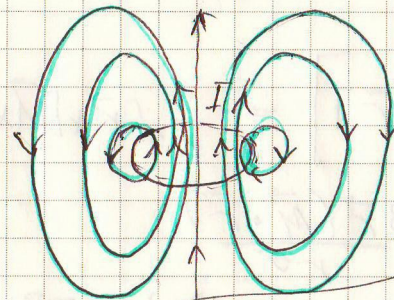
$\vec{g}$ -
 $\vec{H}$ -

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \int_V \vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}' = \frac{1}{2} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}] d\vec{r}' = \\ &= \frac{I}{2} \int_L [\vec{r}' \times d\vec{l}] \end{aligned}$$



$$\vec{M} = IS\vec{n}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3\vec{r}(\vec{M} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right\}$$



Магнитное поле совокупности элементов тока на бесконечном расстоянии.

Реш

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \left[\frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} \text{rot} [\vec{M} \times \vec{r}] + \right.$$

$$\left. + \left[\text{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) \times [\vec{M} \times \vec{r}] \right] \right\}$$

$$\text{rot} [\vec{M} \times \vec{r}] = (\vec{r} \text{grad}) \vec{M} - (\vec{M} \text{grad}) \vec{r} +$$

$\vec{M}$ не зависит от x, y, z

$$= 0 \quad = \vec{M}$$

$$+ \vec{M} \text{div } \vec{r} - \vec{r} \text{div } \vec{M} = 2\vec{M}$$

$$= 3\vec{M} \quad = 0$$

$$\left[\text{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) \times [\vec{M} \times \vec{r}] \right] = -\frac{3}{r^5} [\vec{r} \times [\vec{M} \times \vec{r}]] =$$

$$= -\frac{3\vec{M}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{M} \cdot \vec{r})}{r^5}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3\vec{r}(\vec{M} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right\}$$

copybook

данным условием

$$\text{rot } \vec{B}_m = \mu_0 \vec{j}_m = \mu_0 \rho \vec{v}_m$$

$$\text{div } \rho \vec{v}_m = 0$$

$$\text{div } \vec{B}_m = 0$$

$$\vec{F} = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1}{v_0} \int \vec{j}_m dV dt.$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \rho \vec{v}_m$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

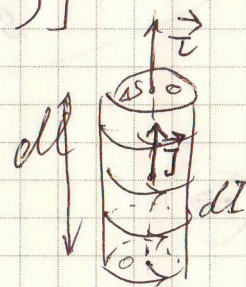
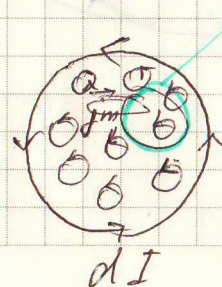
$$\text{div } \rho \vec{v}_m = 0,$$

$$\rho \vec{v}_m = \vec{j} + \vec{j}_m$$

току свободных зарядов

микроэлементарных токов.

$$\vec{J} = \frac{1}{2} [\vec{r}' \times \vec{j}_m(\vec{r}')]]$$

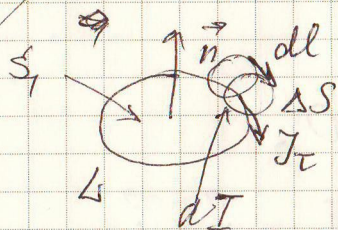


~~$$\int \vec{J} d\vec{l} = \int \text{rot } \vec{J} d\vec{S}_1$$~~

Используя теорему Стокса

$$\int_L \vec{J} d\vec{l} = \int_{S_1} \text{rot } \vec{J} d\vec{S}_1$$

$$\int_L \vec{J} d\vec{l} = \int_L J_z dl \frac{\Delta S}{\Delta S} = \int_L J_z \frac{dl}{\Delta S} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \int_L \frac{dM_z}{\Delta S} = \int_L \frac{dI \Delta S}{\Delta S} = \int_L dI_h =$$

$$= I = \int_{S_1} \vec{j}_m d\vec{S}_1 = \int_{S_1} \text{rot } \vec{J} d\vec{S}_1$$

$\Rightarrow$

$$\vec{j}_m = \text{rot } \vec{J}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_m) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \text{rot } \vec{J}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{L} \vec{B}, \quad \text{— кант-то м.п.}$$

Система координат $x-y-z$ где x — направление $\vec{B}$, y — направление $\vec{H}$, z — направление $\vec{J}$.

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_0 \vec{H}$$

Уравнения Максвелла:

$$\vec{H}_{2z} - \vec{H}_{1z} = \vec{j}$$

$$\vec{B}_{2n} - \vec{B}_{1n} = 0.$$

Игнорируем поле в центре

$$\vec{B} - \vec{B}' = \vec{B}''$$

$$\vec{H} - \vec{H}' = \vec{H}''$$

$$\text{rot } \vec{H}'' = 0, \quad \text{div } \vec{B}'' = 0, \quad \vec{H}_{2z}'' = \vec{H}_{1z}'',$$

$$\vec{B}_{2n}'' = \vec{B}_{1n}''$$

~~Рассчитать~~ = вычислено = 0, т.к.

$$\int_V j_y y dv = \int_V j_x x dv = 0$$

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{a}) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} \varphi$$

$$\rightarrow x j_x = \frac{1}{2} \operatorname{div}(x^2 \vec{j}) - \frac{x^2}{2} \operatorname{div} \vec{j} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{div}(x^2 \vec{j})$$

$$\vec{a} = \vec{j}$$

$$\varphi = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_V j_x x dv = \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(x^2 \vec{j}) dv =$$

$$= \frac{1}{2} \oint_{\text{поверхность}} x^2 j_n dS = 0$$

Аналогично, $\int_V j_y y dv = 0$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \int_V [\vec{r} \times \vec{j}] dV$$

но нак есть еще слагаемое = M_z

$$\int_V x j_y dv = \frac{1}{2} \int_V (x j_y - y j_x) dv +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_V (x j_y + y j_x) dv = M_z$$

= 0 — ~~не вычислено~~

покажем что = 0.

Вспомогательная, найдем, что

$$x j_y + y j_x = \vec{j} \operatorname{grad} xy$$

аналог. $\operatorname{div}(\varphi \vec{a}) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} \varphi$

$$\Rightarrow \int_V (x j_y + y j_x) dv =$$

$$= \int_V \vec{j} \operatorname{grad}(xy) dv =$$

$$= \int_V \operatorname{div}(xy \vec{j}) dv - \int_V xy \operatorname{div} \vec{j} dv =$$

$$= \int xy j_n dS = 0$$

поверхность $= 0$

$$= 0 \quad \text{т.к.} \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

$$\Rightarrow \int_V x j_y dv = M_z$$

Аналогично,

$$\int_V y j_x dv = -M_z$$

$$\int_V y j_z dv = - \int_V z j_y dv = M_x$$

$$\int_V z j_x dv = - \int_V x j_z dv = M_y$$

Тогда

$$F_z = -M_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \right) + M_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} \right) -$$

$$- M_z \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \right) + M_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} \right) =$$

$$= M_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + M_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} \right) +$$

$$+ M_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (\vec{M}, \vec{B})$$

$\Rightarrow$ аналогично для F_x, F_y

$$\Rightarrow \vec{F} = \text{grad} (\vec{M}, \vec{B})$$

$$F_z = M_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + M_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + M_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)$$

Вспомог. f - плотность сил

$$F_z = \int_V f_z dv, \text{ аналогично}$$

$$M_z = \int_V J_z dv$$

$$\Rightarrow f_z = J_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + J_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + J_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)$$

copybook

аналогично

$$\vec{J} = \frac{(\mu - 1) \vec{B}}{2 \mu_0 \mu}$$

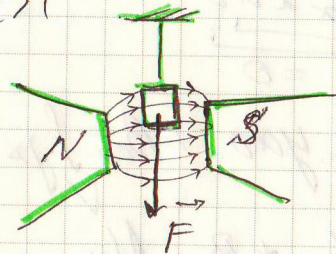
$$f_z = \frac{\mu - 1}{2 \mu_0 \mu} \left(B_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + B_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. + B_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \right) = \frac{\mu - 1}{\mu_0 \mu} \frac{\partial}{\partial z} B^2$$

$\Rightarrow f_x, f_y$ аналогично $\Rightarrow$

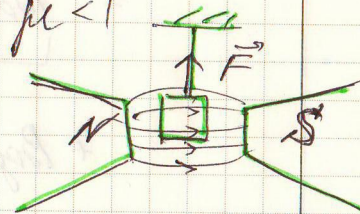
$$\vec{F} = \frac{\mu - 1}{2 \mu_0 \mu} \text{grad} (B^2)$$

$\mu > 1$



параметрически

$\mu < 1$



геометрически

численные силы, действующие на элемент
равномерное поле

$$\vec{N} = \int_V [\vec{r} \times [\vec{j} \times \vec{B}]] dV$$

$$\vec{B} = \vec{B}(0) = \vec{B}_0$$

$$N = \int_V [\vec{r} \times [\vec{j} \times \vec{B}]] dV =$$

$$= \int_V \vec{j} (\vec{r} \times \vec{B}_0) dV - \underbrace{\vec{B}_0 \int_V (\vec{j} \cdot \vec{r}) dV}_{=0 \text{ покажем на том } \text{ср}_B = 0}$$

$$N_x = \int_V j_x (x B_{0x} + y B_{0y} + z B_{0z}) dV =$$

$$= B_{0x} \underbrace{\int_V j_x x dV}_{=0} +$$

$$+ B_{0y} \int_V j_x y dV + B_{0z} \int_V j_x z dV =$$

$$= -B_{0y} M_z + B_{0z} M_y$$

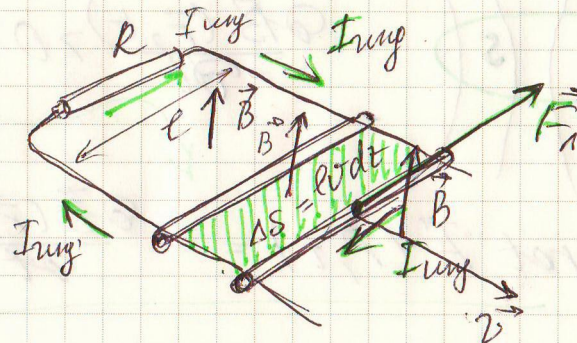
$$\Rightarrow \boxed{\vec{N} = [\vec{M} \times \vec{B}]}$$

Электрическое поле в проводнике, движущемся в постоянном ММ

$$\vec{F} = q [\vec{v} \times \vec{B}]$$

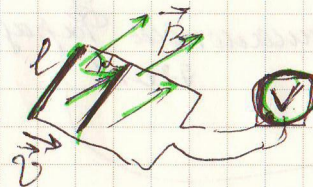
$$\vec{E} = -[\vec{v} \times \vec{B}]$$

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = v B L$$

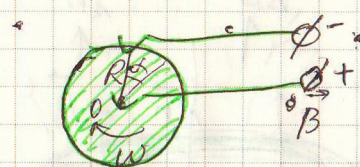


Формально

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{d\Phi}{dt}$$



$$\mathcal{E} = B v l \sin \alpha = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$



$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} B R^2 \omega$$

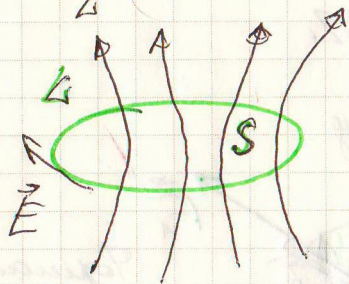
Умножитель
генератор

copybook

Закон Фарадея

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

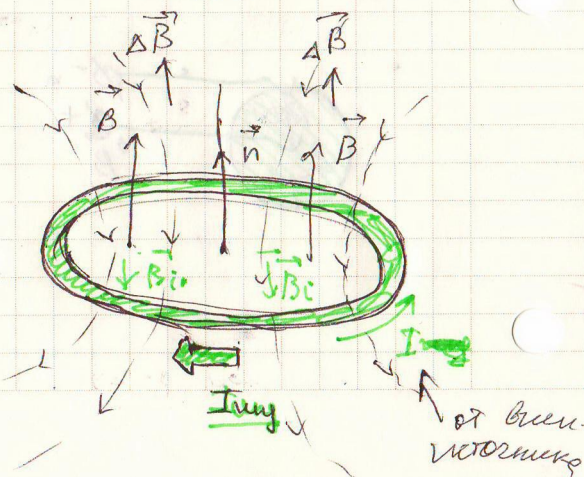
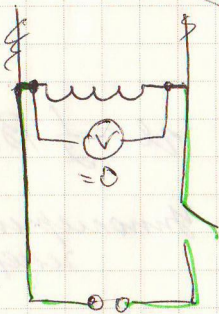
$$\oint \vec{E}(\vec{r}, t) d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



$$\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} > 0$$

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Земная индукция Фарадея

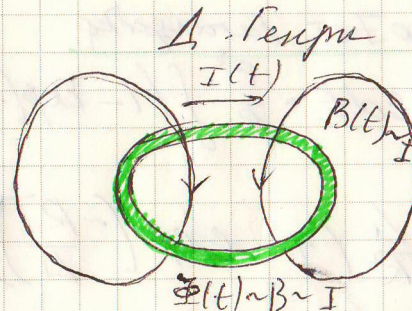


copybook

$$0 = \text{div rot } \vec{E} = - \text{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{B}$$

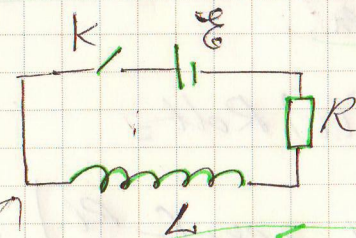
$$\text{div } \vec{B} = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial \text{div } \vec{B}}{\partial t} = 0$$

индукция



$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - L \frac{dI}{dt}$$

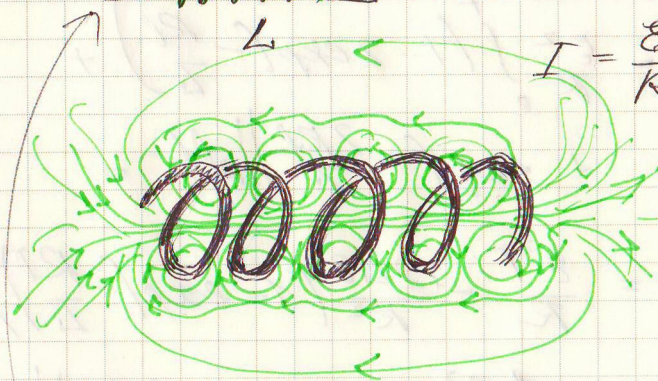
L - индуктивность



$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = IR$$

$$I(0) = 0$$

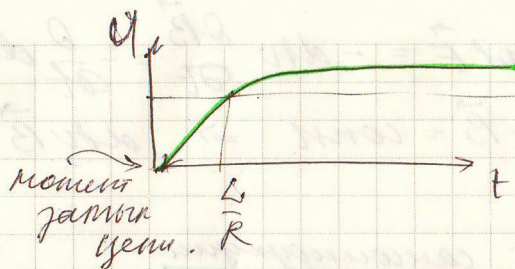
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - \exp(-\frac{Rt}{L}))$$



11:3

$$U = \mathcal{E} (1 - \exp(-\frac{Rt}{L}))$$

период от 1-го



copybook

Работа, кот. совершается

$$A(T) = \int_0^T I \mathcal{E} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^T (1 - \exp(-\frac{Rt}{L})) dt$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left(T - \frac{L}{R} (1 - \exp(-\frac{RT}{L})) \right)$$

Тепло, возникающее в электрической цепи.

$$Q(T) = \int_0^T I^2(t) R dt =$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^T (1 - 2\exp(-\frac{Rt}{L}) + \exp(-\frac{2Rt}{L})) dt =$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2 T}{R} - \frac{2L\mathcal{E}^2}{R^2} (1 - \exp(-\frac{RT}{L})) +$$

$$+ \frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2} (1 - \exp(-\frac{2RT}{L}))$$

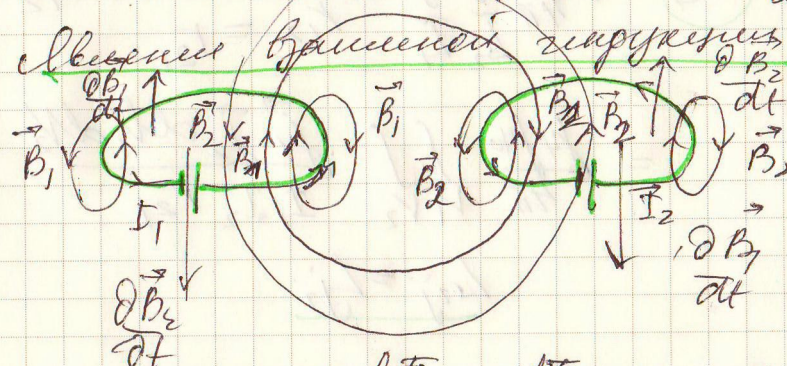
Энергия МД катушки

copybook

$$W(T) = A - Q = \frac{\mathcal{E}^2 L}{R^2} (1 - \exp(-\frac{RT}{L})) -$$

$$- \frac{L\mathcal{E}^2}{R^2} (1 - \exp(-\frac{2RT}{L})) =$$

$$= \frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2} [1 - 2\exp(-\frac{RT}{L}) + \exp(-\frac{2RT}{L})] = \frac{L I^2(T)}{2}$$



$$\mathcal{E}_1 - \frac{d\Phi_{11}}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = \mathcal{E}_1 - L_{11} \frac{dI_1}{dt} -$$

$$- L_{12} \frac{dI_2}{dt} = I_1 R_1$$

$$\mathcal{E}_2 - \frac{d\Phi_{21}}{dt} - \frac{d\Phi_{22}}{dt} = \mathcal{E}_2 - L_{21} \frac{dI_1}{dt} -$$

$$- L_{22} \frac{dI_2}{dt} = I_2 R_2$$

"легко" сводится на систему
и провозмещ.

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} (\vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2) = \int_{S_2} \text{rot} \vec{A}_1 \cdot d\vec{S}_2 =$$

$$= \int_{\tilde{L}_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 \mu_0 I_1}{4\pi} \iint_{\tilde{L}_2 \tilde{L}_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}$$

$$L_{21} = \frac{\mu_0 \mu_0}{4\pi} \iint_{\tilde{L}_2 \tilde{L}_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} = L_{12} =$$

$$= \frac{\mu_0 \mu_0}{4\pi} \iint_{V_1 V_2} \frac{\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2 dV_1 dV_2}{I_1 I_2 r_{21}}$$

$L_{ij} = L_{ji}$

Запишем МДТ

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - L_{11} \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt} = I_1 R_1 \\ \varepsilon_2 - L_{21} \frac{dI_1}{dt} - L_{22} \frac{dI_2}{dt} = I_2 R_2 \end{cases}$$

так же, как $\int$ go from $\int$

$$A_2 = \int_0^T I_1 \varepsilon_1 dt + \int_0^T I_2 \varepsilon_2 dt$$

$$Q = \int_0^T I_1^2 R_1 dt + \int_0^T I_2^2 R_2 dt$$

copybook

Если генератор без то не считаем, то нуль

$$W(T) = A - Q = \frac{1}{2} (L_{11} I_1^2 + L_{12} I_2^2 + L_{21} I_1^2 + L_{22} I_2^2)$$

Теперь выражаем из W выходящее

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_{ij} I_i I_j$$

$$L_{ij} = \frac{\mu_0 \mu_0}{4\pi} \iint_{\tilde{L}_i \tilde{L}_j} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_j}{r_{ij}}$$

$$I d\vec{l} = \vec{j} dV$$

На примере $N=2$

$$W = \frac{\mu_0 \mu_0}{8\pi} \left(\iint_{V_1 V_2} \frac{\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_1 dV_1 dV_2}{r_{11}} + \right.$$

$$\left. + 2 \iint_{V_1 V_2} \frac{\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2 dV_1 dV_2}{r_{12}} + \iint_{V_2 V_2} \frac{\vec{j}_2 \cdot \vec{j}_2 dV_2 dV_2}{r_{22}} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} \left(\int_{V_1} \vec{A}_1 \cdot \vec{j}_1 dV_1 + \int_{V_2} \vec{A}_1 \cdot \vec{j}_2 dV_2 + \right.$$

$$\left. + \int_{V_1} \vec{A}_2 \cdot \vec{j}_1 dV_1 + \int_{V_2} \vec{A}_2 \cdot \vec{j}_2 dV_2 \right)$$

$$W = \frac{1}{2} \left(\int_{V_1} (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) \vec{j}_1 dV_1 + \int_{V_2} (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) \vec{j}_2 dV_2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V_1 + V_2} \vec{A}_{py} \vec{j} dV = \frac{1}{2} \oint \vec{A}_{py} \vec{j} dV$$

$$\text{div}[\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b}$$

$$\vec{b} = \vec{A}, \quad \vec{a} = \vec{B}$$

$$W = \frac{1}{2} \oint \vec{A} \vec{j} dV = \frac{1}{2\mu_0} \oint \vec{A} \text{rot} \vec{B} dV =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \oint \text{div}[\vec{B} \times \vec{A}] dV +$$

$$+ \frac{1}{2\mu_0} \oint \vec{B} \text{rot} \vec{A} dV =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_\infty} [\vec{B} \times \vec{A}]_n dS +$$

$$= 0$$

$$+ \frac{1}{2\mu_0} \oint \vec{B}^2 dV =$$

$$= \frac{1}{2} \oint (\vec{B} \cdot \vec{H}) dV = \oint w dV$$

$$\Rightarrow \boxed{w = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}} \sim \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

Найдем выражение для энергии магнитного поля

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

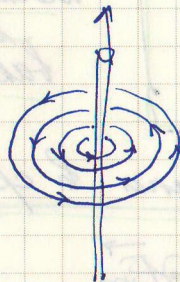
By
Maxwell

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

при этом

$$\text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\text{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



- 1.) 8 лек. упр-и, но 6 кув. (2 и 4 упр-и не учтены, у 1 и 3 с помощью упр-я пер-ти)
- 2.) Лр. непрерывности ЭМП
- 3.) Для решения нужны кон. и пр-я
- гидростатика
- система упр-я Максвелла

$$\begin{aligned}
 0 &= \text{div rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{div } \vec{j} + \\
 &+ \epsilon_0 \text{div} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \\
 &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \epsilon_0 \text{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} (-\rho + \epsilon_0 \text{div} \vec{E})
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho}{\epsilon_0} + f(\vec{r})$$

$$\text{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

но т. задача в краев. нереш.
такой уравнение

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

система
уравнений
максвелла
в
вакууме

Упр. Максвелла в среде

$$\text{rot } \vec{B}_m = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_m}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{B}_m = 0$$

$$\text{rot } \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}_m}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{E}_m = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \text{div} \vec{B} = 0 \\
 &\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 &\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб}}
 \end{aligned}$$

два последних ур:

$$\vec{P} = \rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{связ}} = \rho_{\text{своб}} - \text{div} \vec{P}$$

$$\vec{J} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{v_0} \vec{j}_m dv_0$$

$$\begin{aligned}
 \vec{P} \vec{V} &= \vec{j}_{\text{своб}} + \vec{j}_{\text{связ}} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{своб}} + \text{rot } \vec{J} + \\
 &+ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{связ}}) + \text{div} (\vec{j}_{\text{своб}} + \vec{j}_{\text{связ}} + \\
 &+ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = \frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{\text{своб}} + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial t} (-\text{div} \vec{P}) + \underbrace{\text{div rot } \vec{J}}_{=0} + \text{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \text{div} (-\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}
 \end{aligned}$$

$$\text{rot } \vec{B}_m = \mu_0 (\vec{j}_{\text{своб}} + \text{rot } \vec{J} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) +$$

$$- \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_m}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{своб}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Ур-я Максвелла в сфере:

Внешн. ф:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \end{aligned}$$

Внутр. ф:

$$\begin{aligned} \int_V \vec{j} dV &= \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \\ \int_S \vec{B} d\vec{S} &= 0 \\ \int_L \vec{E} d\vec{l} &= -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \\ \int_S \vec{D} d\vec{S} &= \rho \end{aligned}$$

Материальные ур-я:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H} \end{aligned}$$

1. Зарядов и проверка с токами неพอ!
2. Материальные константы не зависят от времени.
3. Отсутствие построения магнитов и ферромагнетиков
4. При заданных гр и нач. усл. ее решение единств.

Про, что оно единств.

У. ур:

$$\begin{aligned} D_{n2} - D_{n1} &= 0 \\ E_{t2} - E_{t1} &= 0 \\ B_{n2} - B_{n1} &= 0 \\ H_{t2} - H_{t1} &= 0 \end{aligned}$$

Единственность решения:

$$\begin{aligned} \vec{D}_2 - \vec{D}_1 &= \vec{D} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 &= \vec{B} \\ \vec{E}_2 - \vec{E}_1 &= \vec{E} \\ \vec{H}_2 - \vec{H}_1 &= \vec{H} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0 \end{aligned} \right.$$

В нач. моменты гр. $\vec{B} = \vec{D} = \vec{H} = \vec{E} = 0$
 $\vec{D}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{H}$ на гр-це $= 0$

$$\oint_V \sigma E^2 dv = \int_V \vec{E} \left(\text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV \quad \text{copybook}$$

$\vec{a} \text{ rot } \vec{b} = \vec{b} \text{ rot } \vec{a} + \text{div} [\vec{a} \times \vec{b}]$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int_V \vec{H} \text{ rot } \vec{E} dv &= \int_V \text{div} [\vec{E} \times \vec{H}] dv - \\ &= \epsilon_0 \epsilon \int_V \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dv = -\frac{1}{\mu_0 \mu} \int_V \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dv - \\ &= \epsilon_0 \epsilon \int_V \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dv - \int_S [\vec{E} \times \vec{H}] d\vec{S} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mu \vec{B}^2 \right) dv \right) =$$

уменьшение кин. энергии

$$\cancel{\int_V \sigma E^2 dv} = \int_V \sigma \vec{E}^2 dv \geq 0$$

$$\left(\int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mu \vec{B}^2 \right) dV \right) \Big|_{t=0} = 0$$

т.к. уменьшение кин. энергии

$$\Rightarrow \vec{D}=0, \vec{B}=0, \vec{E}=0, \vec{H}=0.$$

copybook

Закон сохранения энергии.

$$W(t) = \frac{1}{2} \oint (\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H}) dV$$

- полная гравитационная энергия

$$\int_V \sigma \vec{E}^2 dv = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dv = \int_V \vec{E} \left(\text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV =$$

$$= - \int_V \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dv + \int_V \vec{H} \text{ rot } \vec{E} dv -$$

$$- \int_V \text{div} [\vec{E} \times \vec{H}] dv =$$

$$= - \int_V \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dv - \int_V \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dv - \int_S [\vec{E} \times \vec{H}] d\vec{S}$$

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \int_V (\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H}) dV \right) -$$

$$- \int_S [\vec{E} \times \vec{H}] d\vec{S}$$

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV - \int_S [\vec{E} \times \vec{H}] d\vec{S}}$$

$$\boxed{\vec{S}_p = [\vec{E} \times \vec{H}]}$$

- вектор Пойнтинга

~~т.е. т.е.~~

From MBGauss equations $\rho=0, \vec{j}=0$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{D} = 0, \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$$

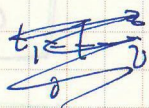
$$\text{rot rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} =$$

$$= -\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 = \frac{2\pi}{c^2} = \frac{1}{v^2}$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$



$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{F}_1(t - \frac{z}{v}) + \vec{F}_2(t + \frac{z}{v})$$

$$\vec{E} = \vec{A}_1 \sin[\omega(t - \frac{z}{v}) + \varphi_1] + \vec{A}_2 \sin[\omega(t + \frac{z}{v}) + \varphi_2]$$

$$E_x = A_0 \sin[\omega(t - \frac{z}{v})]$$

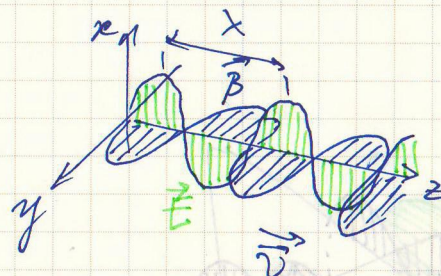
$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{rot } \vec{E})_{x,z} = 0$$

$$(\text{rot } \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$B_y = \frac{A_0}{v} \sin[\omega(t - \frac{z}{v})]$$

$$E_x = v B_y$$

$$E_x = v \mu \mu_0 H_y$$



$$t_1 = t - \frac{z}{v}$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = \left(-\frac{1}{v}\right)^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial t_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial t_1^2}$$

$$S = \langle |\vec{E} \vec{H}| \rangle = \langle E_x H_y \rangle =$$

$$= (v \mu \mu_0)^{-1} \langle E_x^2 \rangle =$$

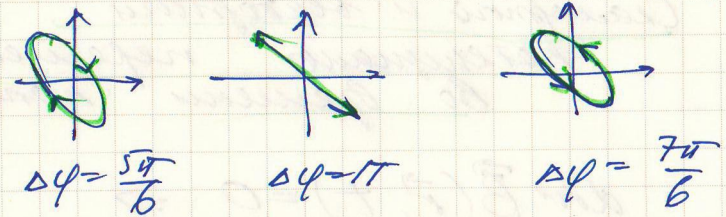
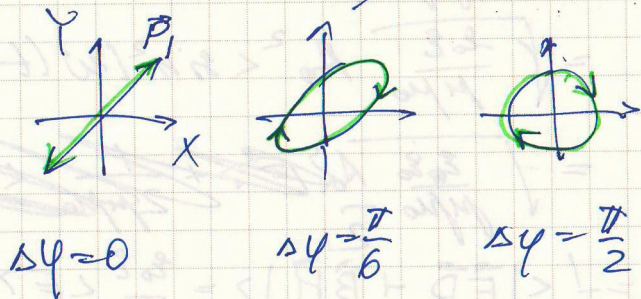
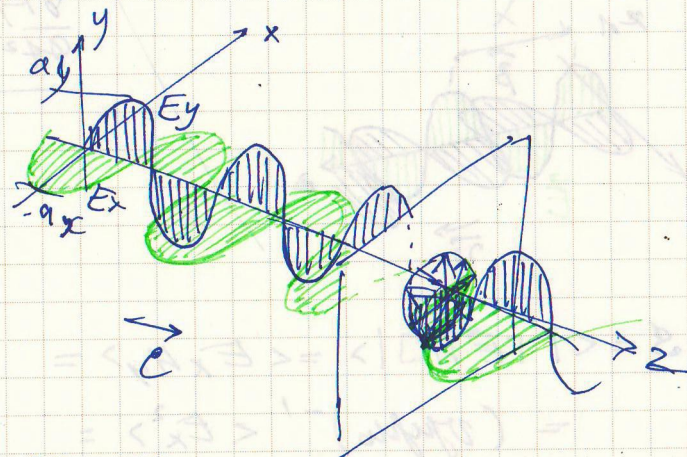
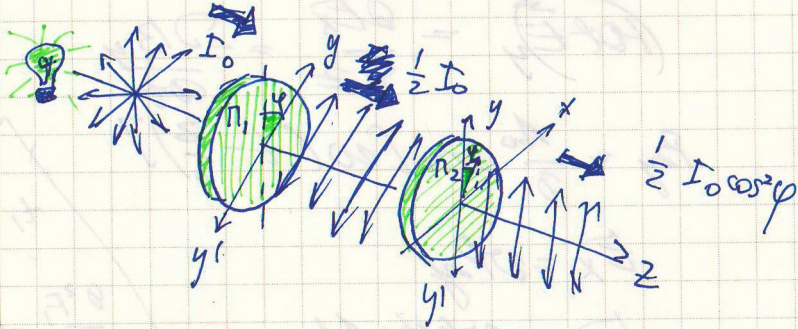
$$= \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu \mu_0}} A_0^2 \langle \sin^2[\omega(t - \frac{z}{v})] \rangle =$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu \mu_0}} \frac{A_0^2}{2} + \frac{1}{2\mu \mu_0} \langle B^2 \rangle =$$

$$w = \frac{1}{2} \langle |\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H}| \rangle = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \langle E^2 \rangle + \frac{1}{2\mu \mu_0} \langle B^2 \rangle =$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \langle E^2 \rangle + \frac{1}{2\mu_0 v^2} \langle E^2 \rangle =$$

$$= \epsilon_0 \epsilon \langle E^2 \rangle = \frac{\epsilon_0 \epsilon_0}{2} A_0^2$$



Решение волнового уравнения
(сферическая волна)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \vec{E})}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_1(t - \frac{r}{v})}{r} + \frac{\vec{F}_2(t + \frac{r}{v})}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{A}_1 \sin[\omega(t - \frac{r}{v}) + \varphi_1]}{r}$$

сферическая волна

волна, затухающая в ∞
и при-то р-е сферическая

Скалярное и векторное
потенциалы переменных
во времени полей

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi(\vec{r}, t)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \text{grad } \varphi(\vec{r}, t)$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{A}_1 = \vec{A} + \text{grad } \varphi(\vec{r}, t)$$

$$\varphi_1 = \varphi - \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{A}_1(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \text{grad } \varphi_1(\vec{r}, t) =$$

$$= -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi -$$

$$- \text{grad } \varphi(\vec{r}, t) + \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \text{grad } \varphi(\vec{r}, t)$$

Условие скалярного потенциала

$$\text{div} \left(\vec{A}(\vec{r}, t) + \text{grad } \varphi(\vec{r}, t) \right) = 0$$

Уп-е где скалярное и
векторное потенциалы

с учетом свойств $\text{rot rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{B} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} =$

$$= \text{grad} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) =$$

$$= \text{grad } \vec{j} + \text{grad } \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (-\text{grad } \varphi -$$

$$- \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \text{grad } \vec{j} - \text{grad } \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} -$$

$$- \text{grad } \epsilon_0 \epsilon \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

с гр. свойств

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\text{grad } \vec{j} - \text{grad } \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad } \epsilon_0 \epsilon$$

$$\mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} -$$

$$- \mu_0 \epsilon_0 \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$= 0$ из условия
замкнутой цепи

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$

- уравнение
для электромагн.
потенциала

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \text{div} \vec{E} = \text{div} \left(-\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\Delta \varphi - \text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \\ &= -\Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}) = \\ &= -\Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \\ &= -\Delta \varphi + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \end{aligned}$$

↑
непр.
усл.
замкнутой

$$\Delta \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0 \epsilon}$$

- уравнение для потенциала
электростатического

Решение уравнения (уравнение)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \oint \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

Уравнение или или
замкн. конт-ра?

$$\text{div} \vec{A}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 ?$$

$$\text{div} \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \text{div} \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\vec{r}'$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \text{div} \varphi \vec{a} &= \varphi \text{div} \vec{a} + \vec{a} \text{grad} \varphi \\ t(\vec{r}) &= t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v} \\ \text{div} F(f(\vec{r})) &= \frac{\partial F}{\partial f} \text{grad} f(\vec{r}) \cdot \vec{n} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}', t) + \vec{j}(\vec{r}', t) \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} =$$

$$= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t)}{\partial t} \left(-\frac{1}{v} \right) \operatorname{grad} |\vec{r} - \vec{r}'| + \vec{j}(\vec{r}', t) \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\operatorname{div}' \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}', t) + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t)}{\partial t} \left(-\frac{1}{v} \right) \operatorname{grad}' |\vec{r} - \vec{r}'| + \vec{j}(\vec{r}', t) \operatorname{grad}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t)}{\partial t} \left(-\frac{1}{v} \right) \operatorname{grad}' |\vec{r} - \vec{r}'| + \vec{j}(\vec{r}', t) \operatorname{grad}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\operatorname{div}(\dots) + \operatorname{div}'(\dots) =$$

$\vec{E} \rightarrow$

$$\operatorname{div}(\dots) + \operatorname{div}'(\dots)$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) + \operatorname{div}' \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) =$$

$$= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \operatorname{div}' \vec{j}(\vec{r}', t) = \text{const}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \mu_0}{4\pi} \oint \operatorname{div} \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\vec{r}' =$$

$$= -\frac{\mu_0 \mu_0}{4\pi} \oint \operatorname{div}' \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\vec{r}' +$$

$$+ \frac{\mu_0 \mu_0}{4\pi} \oint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \operatorname{div}' \vec{j}(\vec{r}', t) d\vec{r}' = \text{const}$$

$$= -\frac{\mu_0 \mu_0}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s} +$$

$$+ \frac{\mu_0 \mu_0}{4\pi} \oint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \operatorname{div}' \vec{j}(\vec{r}', t) d\vec{r}' = \text{const}$$

proceeding

$$\mu_0 \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\mu_0 \mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \oint \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' =$$

$$= \frac{\mu_0 \mu_0}{4\pi} \oint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t)}{\partial t} d\vec{r}'$$

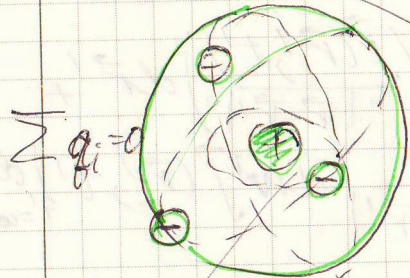
$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}$$

copybook

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \\ &= \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi} \oint \left[\frac{\partial \rho(\vec{r}', t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}', t) \right] \times \\ &\quad \times \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \stackrel{=0}{=} \end{aligned}$$

geschlossen

yp + e
unverändert
nach 0



$$|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\rho(\vec{r}' - t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}$$

$$\phi(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \oint \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{v}) d\vec{r}'$$

$$- \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{r}{v})}{r} \right) d\vec{r}'$$

$$\boxed{\phi(\vec{r}, t) \approx - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \times}$$

copybook

$$\begin{aligned} &\times \oint \vec{r}' \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{v}) d\vec{r}' = \\ &= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\oint \vec{p}(t - \frac{r}{v})}{r} \right) = \\ &= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(- \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{r}}{r^2} \frac{\partial \vec{p}}{\partial r} \right) = \\ &= \left[- \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\vec{p} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{p} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial \vec{p}}{\partial r} &= \frac{x}{r} \frac{\partial p_x}{\partial r} + \frac{y}{r} \frac{\partial p_y}{\partial r} + \frac{z}{r} \frac{\partial p_z}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial p_y}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial p_z}{\partial r} = \\ &= \operatorname{div} \vec{p} \end{aligned}$$

proof

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{div} \vec{A}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

$$\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{v})}{r} d\vec{r}' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} \oint \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{v}) d\vec{r}' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial \vec{p}(t - \frac{r}{v})}{\partial t}$$

gekennzeichnet!

Упр-е непр-ти $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{v})}{\partial t} = -dv' \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{v})$$

$$\int_V \vec{r}' \frac{\partial \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{v})}{\partial t} d\vec{r}' = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{v}) d\vec{r}' \right] =$$

$$= - \int_V \vec{r}' dv' \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{v}) d\vec{r}'$$

переносим
вектор $\vec{r}'$

умножим на
переносимый вектор $\vec{r}$

$$\vec{a} \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} = -\vec{a} \int_V \vec{r}' dv' \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{v}) d\vec{r}' =$$

$$= - \int_V \vec{a} \vec{r}' dv' \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{v}) d\vec{r}' =$$

$$= - \int_V \vec{a} \vec{r}' dv'$$

$$= - \int_V dv' ((\vec{a} \cdot \vec{r}') \vec{j}) d\vec{r}' +$$

$$+ \int_V \vec{j} \text{grad}' (\vec{a} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' =$$

$\text{grad}' (\vec{a} \cdot \vec{r}') = \vec{a}$

$$= - \int_V \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{r}')}_{=0} j_0 d\vec{r}' + \vec{a} \int_V \underbrace{j(\vec{r}', t - \frac{r}{v})}_{=0} d\vec{r}'$$

$\Rightarrow$ опра исчезла.

$$\varphi(\vec{r}, t) \approx - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} dv' \left(\frac{\vec{P}(t - \frac{r}{v})}{r} \right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial \vec{P}(t - \frac{r}{v})}{\partial t}$$

в электромагнитном
приближении

представим $\vec{B}$ и $\vec{E}$

$$\vec{P}(t - \frac{r}{v}) = \vec{P}_0 f(\vec{r}, t)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) \approx - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} dv' \vec{P}_0 f(\vec{r}, t)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}_0 f(\vec{r}, t)$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}_0 f(\vec{r}, t) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} (\vec{P}_0 f(\vec{r}, t))$$

$$\vec{E} = - \text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \text{grad} dv' \vec{P}_0 f(\vec{r}, t) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0 p_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}_0 f(\vec{r}, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} (\text{rot rot}(\vec{p}_0 f(r, t))) +$$

$$+ \Delta \vec{p}_0 f(r, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{p}_0 f(\vec{r}, t)) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \text{rot rot}(\vec{p}_0 f(r, t))$$

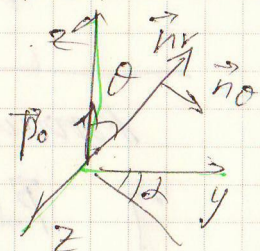
= 0, т.к. $\vec{p}_0$ — вектор $\vec{p}_0 = e$

непосредственно в координатах $\vec{p}(t - \frac{r}{v}) = \vec{p}_0 f(\vec{r}, t)$

$$p_r = p_0 \cos \theta$$

$$p_\theta = p_0 \sin \theta$$

$$p_\phi = 0$$



$$\vec{p}(t - \frac{r}{v}) = \vec{p}_0 f(\vec{r}, t) =$$

$$= \vec{p}_0 \frac{\exp[i\omega(t - \frac{r}{v})]}{r}$$

$$\text{rot}(\vec{p}_0 f) = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot p_\theta f) - \frac{\partial}{\partial \phi} (p_\phi f) \right] \times$$

$$\times \vec{n}_r + \frac{1}{r} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi} (p_\phi f) - \frac{\partial}{\partial \theta} (r p_\theta f) \right] \vec{n}_\theta +$$

$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r p_\phi f) - \frac{\partial}{\partial \phi} (p_\phi f) \right] \vec{n}_\phi$$

~~$$f(\vec{r}, t) \frac{\partial}{\partial r} f(\vec{r}, t) = -\frac{1}{r} f - \frac{i\omega}{v} f$$~~

$$\Rightarrow (\text{rot } \vec{p}_0 f)_r = 0, (\text{rot } \vec{p}_0 f)_\theta = 0$$

$$(\text{rot } \vec{p}_0 f)_\phi = \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} (r p_0 \sin \theta \cdot f) + p_0 \sin \theta \cdot f \right] =$$

$$= -p_0 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} = p_0 \sin \theta \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{v} \right) \times$$

$$\times \exp(i\omega(t - \frac{r}{v}))$$

$$\text{rot rot } \vec{p}_0 f = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta (\text{rot } \vec{p}_0 f)_\phi) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial \phi} (\text{rot } \vec{p}_0 f)_\theta \right] \vec{n}_r + \frac{1}{r} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi} (\text{rot } \vec{p}_0 f)_r - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial r} (r (\text{rot } \vec{p}_0 f)_\phi) \right] \vec{n}_\theta +$$

$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r (\text{rot } \vec{p}_0 f)_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{rot } \vec{p}_0 f)_r \right] \vec{n}_\phi$$

$$\rightarrow 0, (\text{rot } \vec{p}_0 f)_r = 0$$

$$\times = 0, (\text{rot } \vec{p}_0 f)_\theta = 0$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \text{rot rot } \vec{p}_0 f(r, t) \Rightarrow E_\phi = 0$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{p_0 \sin \theta}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{v} \right) \exp(i\omega(t - \frac{r}{v})) \right) = \frac{p_0 \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 \epsilon r} \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{v} \right) \exp(i\omega(t - \frac{r}{v}))$$

copybook

$$E_\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\partial}{\partial t} \left(r \cdot \frac{p_0 \sin \theta}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{v} \right) \times \exp(i\omega(t - \frac{r}{v})) \right) =$$

$$= -\frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{i\omega}{v} \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{v} \right) \right) \times \exp(i\omega(t - \frac{r}{v})) =$$

$$= \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{rv} + \frac{\omega^2}{v^2} \right) \exp(i\omega(t - \frac{r}{v}))$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 p_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{p}_0 f(\vec{r}, t) \leftarrow$$

$$B_z = \frac{\mu_0 p_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_0 \sin \theta}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{v} \right) \exp(i\omega(t - \frac{r}{v})) \right) =$$

$$= \frac{i\mu_0 p_0 \omega \sin \theta}{4\pi r} \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{v} \right) \exp(i\omega(t - \frac{r}{v}))$$

$B_r = 0, B_\theta = 0$

$|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ $\vec{B} = \{0, 0, B_z\}, \vec{E} = \{E_r, E_\theta, 0\}$

$\Rightarrow \vec{B} \perp \vec{E}$

$\lambda \ll r \Leftrightarrow \frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{v}$

$$H_z = -\frac{\omega^2 p_0 \sin \theta}{4\pi r v} \exp(i\omega(t - \frac{r}{v}))$$

$$E_\theta = -\frac{p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r v^2} \exp(i\omega(t - \frac{r}{v}))$$

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]$$

copybook

$$S_r = \text{Re} \{ E_r \} \text{Re} \{ H_z \} = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2 v^3} \cos^2(\omega(t - \frac{r}{v}))$$

$$\langle S_r \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2 v^3} \langle \cos^2(\omega(t - \frac{r}{v})) \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 r^2 v^3}$$

Норму $\vec{S}$ интегрируем по объему наблюдения

$$P = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \langle S_r \rangle =$$

$$= \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^2 v^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta =$$

$\cos \theta = x$

$$= \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi \epsilon_0 r^2 v^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta =$$

$$= \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx = \frac{4}{3}$$

Закон сохранения импульса

$$\frac{d\vec{p}_0}{dt} = q_0 [\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]]$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \oint \rho(\vec{r}, t) [\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]] dV$$

$$\rho = \text{div} \vec{D}$$

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \oint_V \vec{E} \operatorname{div} \vec{B} dV + \oint_V [\operatorname{rot} \vec{A} \times \vec{B}] dV - \oint_V \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{B} \right] dV + \oint_V [(\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \times \vec{B}] dV + \oint_V \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} dV = 0$$

ненормирован / 2-го:

1) $\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$

2) $[\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}] = \frac{1}{2} \operatorname{grad} E^2 - (\vec{E} \nabla) \vec{E}$

copybook

~~Вок.~~ Вок. 274 и 275.

1) ~~Вектор~~
 x-ая компонента

$$E_x \partial_x E_x + E_x \partial_y E_y + E_x \partial_z E_z =$$

$$= \partial_x E_x^2 + \partial_y E_y E_x + \partial_z E_z E_x -$$

$$- E_x \partial_x E_x - E_y \partial_y E_x - E_z \partial_z E_x$$

$$\begin{aligned} & \text{2)} \quad x\text{-ad kommutator} \\ & E_y (\text{rot } \vec{E})_z - E_z (\text{rot } \vec{E})_y = \\ & = E_x \partial_x E_x + E_y \partial_x E_y + E_z \partial_x E_z - \\ & - (E_x \partial_x + E_y \partial_y + E_z \partial_z) E_x \\ & \underline{E_y \partial_x E_y} - \underline{E_y \partial_y E_x} + \underline{E_z \partial_x E_z} - \underline{E_z \partial_z E_x} = \\ & = E_x \partial_x E_x + \underline{E_y \partial_x E_y} + \underline{E_z \partial_x E_z} - \\ & - \underline{E_x \partial_x E_x} - \underline{E_y \partial_y E_x} - \underline{E_z \partial_z E_x} \\ & \Rightarrow \underline{[\vec{E} \text{div } \vec{E} - (\vec{E} \times \text{rot } \vec{E})] = (\nabla \vec{E}) \vec{E} - [\nabla \vec{E}]^2} \end{aligned}$$

А теперь воспользуемся тем же
для дока-ва поликов.

$$\oint_V (\vec{V} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{E}^2 dV =$$

$$= \oint_S (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{E} dS - \frac{1}{2} \oint_S \vec{n} \cdot \vec{E}^2 dS = 0$$

Аналогично, второй доказано.

т.к. $\oint_V \vec{V} \varphi dV = \oint_S \vec{n} \varphi dS$

⇒

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \oint (\vec{E} d\vec{r} \cdot \vec{D} - [\vec{D} \times \text{rot} \vec{E}]) d\vec{v} + \oint (\vec{H} d\vec{r} \cdot \vec{B} - [\vec{B} \times \text{rot} \vec{H}]) d\vec{v} - \oint [\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B}] d\vec{v} - \oint [\vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}] d\vec{v} = - \frac{\partial}{\partial t} \oint [\vec{D} \times \vec{B}] d\vec{v}$$

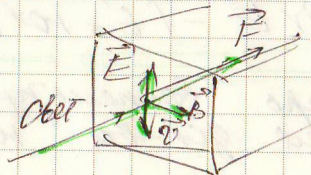
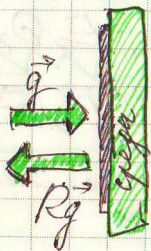
$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \oint [\vec{D} \times \vec{B}] d\vec{v} = 0$$

$$\vec{g} = [\vec{D} \times \vec{B}] - \text{плотность энергии}$$

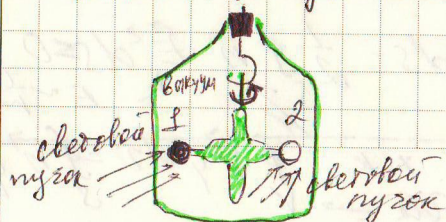
$$[\vec{g} = [\vec{D} \times \vec{B}]] = \epsilon_0 \epsilon \mu_0 [\vec{E} \times \vec{H}] = \frac{\vec{S}_p}{v^2}$$

$$(1+R) g \Delta S \Delta t = p \Delta S \Delta t$$

$$p = (1+R) g v = (1+R) \frac{S_p}{v}$$



Н.Н. Перегов 1900:



copybook

классическая механика

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)$$

$$\text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

Какая это механика?

по классике:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon \omega \vec{E}_0 \cos \omega t$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma \vec{E}_0 \sin \omega t$$

$\omega - ?$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) \gg \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \Leftrightarrow \sigma \vec{E}_0 \gg \epsilon_0 \epsilon \omega \vec{E}_0$$

$$\sigma \gg \epsilon_0 \epsilon \omega$$

$$\text{Две вещи: } \omega \ll 10^{17} \frac{1}{\text{с}}$$

Тех, меняющийся с частотой $50 \text{ Гц} \Rightarrow \lambda \approx 600 \text{ км} \gg \Delta$

В масштабе Москвы можно пренебречь квантацией - сплошным приближением.

А в Европ. разг. речем уже нет:)

Сценарий

$$\frac{dI(t)}{dt} > 0$$



уменьшение
тока
переход
уменьшения

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) + \sigma \vec{E}$$

$$\text{rot rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = - \text{rot } \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} =$$

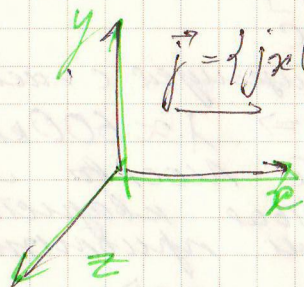
$$= - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = - \text{curl } \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) =$$

$$= - \text{curl } \sigma \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\text{rot rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = \text{grad div } \vec{E}(\vec{r}, t) - \Delta \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$\Delta \vec{E} = \text{curl } \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Нерешено (для упрощения) рассмотрим
только $\sigma = 0$



$$\vec{j} = \{j_x(y, t), 0, 0\}$$

$$\vec{E} = \{E_x(y, t), 0, 0\}$$

$$E_x(y, t) = E_0(y) \cdot \exp(i\omega t)$$

$$\Delta \vec{E} = \text{curl } \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{d^2 E_0}{dy^2} = i \text{curl } \sigma \omega E_0$
одно решение (другое не подходит)

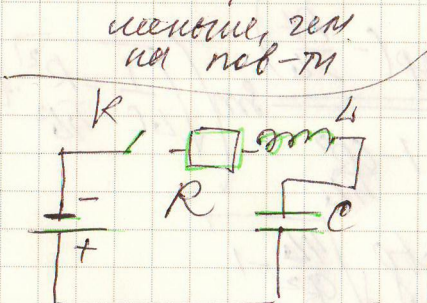
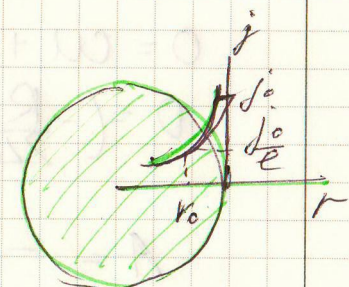
$$E_0 = A \exp[-\alpha(1+i)y],$$

$$\text{где } \alpha = \sqrt{\frac{\text{curl } \sigma \omega}{2}}$$

$$j_x = j_0 \exp[-\alpha(1+i)y]$$

$\alpha = \frac{1}{\delta}$ — толщина экранирующего слоя

Одно решение при $\omega = 10^4 \text{ В/с}$
 $\delta = 4 \text{ мм}$



$$U - L \frac{dI}{dt} = IR + \frac{q}{C}$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$q(0) = 0, I(0) = 0$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{U}{L}$$

$$q(t) = CU + A \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \times$$

$$\times \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t + \varphi\right)$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = A \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \left(-\frac{R}{2L} \times\right.$$

$$\times \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t + \varphi\right) +$$

$$\left. \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t + \varphi\right)\right\}$$

$$0 = CU + A \sin \varphi$$

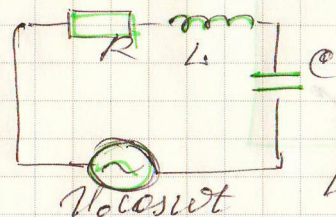
$$0 = \left(-\frac{R}{2L}\right) \sin \varphi + \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cos \varphi$$

$$A = -\frac{CU}{\sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}}}; \quad \varphi = \arctg \sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1}$$

$$q(t) = CU \left[1 - \frac{\exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right)}{\sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}}} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t + \arctg \sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1} \right. \right.$$

copybook

через комплексную амплитуду



$$\frac{dq}{dt} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{U_0 \cos \omega t}{L}$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} =$$

$$= -i\omega U_0 \sin \omega t$$

$$U_0 \cos \omega t = U_0 \operatorname{Re} \{ \exp(i\omega t) \}$$

$$I(t) = \operatorname{Re} \{ \hat{I} \exp(i\omega t) \}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \left[L \frac{d^2}{dt^2} + R \frac{d}{dt} + \frac{1}{C} \right] \hat{I} \exp(i\omega t) \right\} = U_0 \operatorname{Re} \{ i\omega \exp(i\omega t) \}$$

$\hat{I}$ — комплексная амплитуда (ток, Век)
~~(реальная)~~
 ($\operatorname{Re} \hat{I}$ — реальная ток в цепи I)

$$\left[L \frac{d^2}{dt^2} + R \frac{d}{dt} + \frac{1}{C} \right] \hat{I} \exp(i\omega t) = U_0 \{ i\omega \exp(i\omega t) \}$$

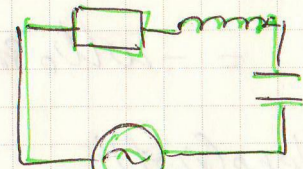
$$\left[-i\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C} \right] \hat{I} = i\omega U_0$$

$$\left[i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C} \right] \hat{I} = U_0$$

$$L \Rightarrow Z_L = i\omega L$$

$$R \Rightarrow Z_R = R$$

$$C \Rightarrow Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$



$U_0 \cos \omega t$

$$[Z_L + Z_R + Z_C] \hat{I} = \frac{U_0}{\omega}$$

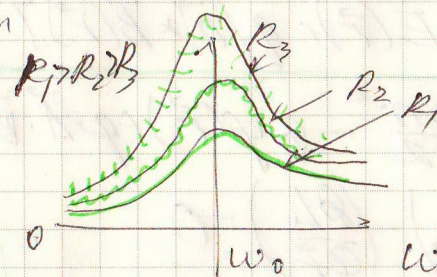
$$I(t) = \operatorname{Re} \{ \hat{I} \exp(i\omega t) \} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{U_0 \exp(i\omega t)}{i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C}} \right\}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos \left(\omega t - \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \right)$$

$$I_m = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$\Phi = \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$

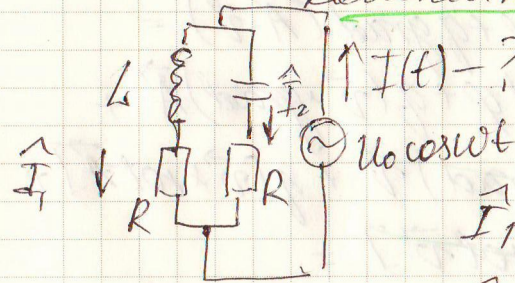
I_m



$$\omega_0 \approx \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\Phi(\omega_0 \approx \omega_0) = 0$$

Законы Кирхгофа и метод комплексных действующих



$$\hat{I}_1 = \frac{U_0}{R + i\omega L}$$

$$\hat{I}_2 = \frac{U_0}{R + \frac{1}{i\omega C}}$$

$$I(t) = \operatorname{Re} \{ (\hat{I}_1 + \hat{I}_2) \exp(i\omega t) \}$$

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = U_0 \frac{2R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{(R + i\omega L)(R + \frac{1}{i\omega C})}$$

$$I(t) = U_0 \frac{\sqrt{4R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{C^2}} + R^2(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \times \cos \left\{ \omega t - \arctg \left(\frac{\omega L}{R} \right) + \arctg \left(\frac{1}{\omega RC} \right) + \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{2R} \right) \right\}$$

Задача на Ларанжа и Тамишески
радиус, грав. б. ММ

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E}(\vec{r}) + q[\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})]$$

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{mv^2}{2} - q\varphi(\vec{r}) + q\vec{A} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} &= -q \text{grad} \varphi + q \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{v}) = \\ &= -q \text{grad} \varphi + q(\vec{v} \times \text{grad})\vec{A} + \\ &+ q(\vec{A} \cdot \text{grad})\vec{v} + q[\vec{v} \times \text{rot} \vec{A}] + \\ &+ q[\vec{A} \times \text{rot} \vec{v}] = \\ &= -q \text{grad} \varphi + q(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{A} + \\ &+ q[\vec{v} \times \vec{B}] \end{aligned}$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A} \quad \text{связанный момент}$$

находим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) &= \frac{d}{dt} (m\vec{v} + q\vec{A}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \\ &+ q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} v_z \right) = \end{aligned}$$

copybook

$$= m \frac{d\vec{v}}{dt} + q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{A}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \right) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \\ &+ q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{A} + q \text{grad} \varphi - \\ &- q(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{A} - q[\vec{v} \times \vec{B}] \end{aligned}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left\{ -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi + \right.$$

$$\left. \begin{aligned} &= \vec{E} \\ &+ q[\vec{v} \times \vec{B}] - q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}] \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}$$

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\varphi$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} &= -q \text{grad} \varphi - \frac{1}{2m} \text{grad} \varphi (\vec{p} - q\vec{A})^2 \\ &\times (\vec{p} - q\vec{A}) \end{aligned}$$

$$\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{a}) = 2[\vec{a} \times \text{rot} \vec{a}] + 2(\vec{a} \cdot \text{grad})\vec{a}$$

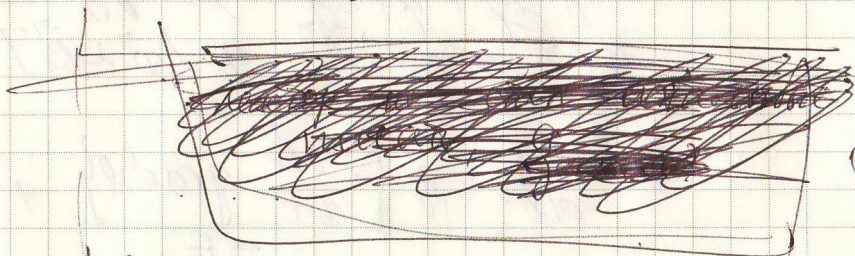
используем ~~нормаль~~ ^{верный} нормальный вектор!

copybook

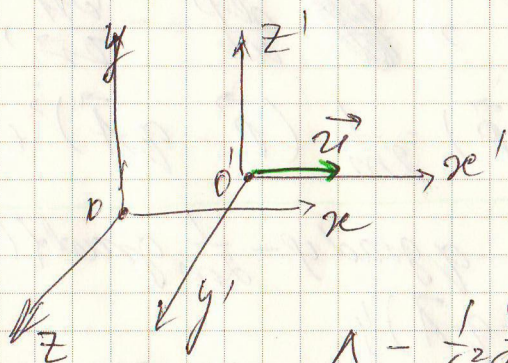
Экстремализация двучисленных дел

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$



1) Инвариантность отн-но преобр-ий Лоренца.



$$\vec{u} = \{u, 0, 0\}$$

$$\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{ — оператор Даламбера}$$

не инв. отн-но преобр. ~~Лоренца~~
Ланжмеса:

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

copybook

Мы хотим ~~найти~~ преобразования относительно которых инв.

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x) \end{cases}$$

как берется время?

Теперь оно будет меняться

$$\text{где } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}}$$

преобразования Лоренца.

Проверим инв-т

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \gamma + \frac{\partial}{\partial t'} (-\gamma \frac{u}{c^2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} (-\gamma u) + \frac{\partial}{\partial t'} \gamma$$

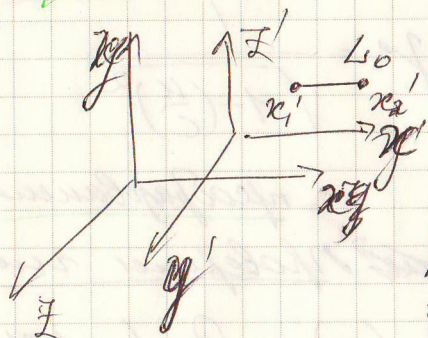
$$\begin{aligned} \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \gamma^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{2u}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) - \\ &\quad - \frac{\gamma^2}{c^2} \left(u^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2u \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \left(\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

≠ инв!

2) При переходе из одной с.к. в другую время и координаты меняются



$$L_0 = x_2' - x_1'$$

~~Какая~~ стандарт

Какова длина стандарта в другой с.к.?
движущаяся

$$x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - vt) - \gamma(x_1 - vt) =$$

$$= \gamma(x_2 - x_1) = L\gamma$$

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0$$

т.е.

т.е. движущийся объект в ~~инерциальной~~ инерц. с.к. имеет

copybook

кажется короче, чем в движущейся.

~~В~~ в ~~инерц.~~ инерц. с.к. протекает процесс

$$\Delta t_0 = t_2' - t_1' \quad (\text{в с.к. } x')$$

В неподвижной:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{считаем, что} \\ \text{инерц. с.к.} \\ \text{движется относительно} \\ \text{инерц. с.к. со ск. } -v \end{array} \right\}$$

$$= \gamma \left(t_2' + \frac{v}{c^2} x_2' \right) - \gamma \left(t_1' + \frac{v}{c^2} x_1' \right) =$$

$$= \gamma (t_2' - t_1') = \gamma \Delta t_0$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t_0$$

Выводим, что процесс происходит не в одной т., а в разных

$$\Delta t = \gamma (t_2' + \frac{v}{c^2} x_2') - \gamma (t_1' + \frac{v}{c^2} x_1') =$$

$$= \gamma (t_2' - t_1') + \gamma \frac{v}{c^2} (x_2' - x_1')$$

$$t_2' = t_1' \Rightarrow \Delta t_0 = 0 \Rightarrow \Delta t \neq 0;$$

Интервал:

$$\Delta s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$$

- величина инв. относительно преобраз. Лоренца.

Аналогично, по аналогии распадаения между двумя точками.

это происходит? ~~переход~~

$$\left. \begin{array}{l} x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \\ x^4 = ict \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta s^2 = (\Delta x^\alpha)^2, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

$$\begin{cases} x^{1'} = \gamma(x^1 + i\frac{u}{c}x^4) \\ x^{4'} = \gamma(x^4 - i\frac{u}{c}x^1) \end{cases}$$

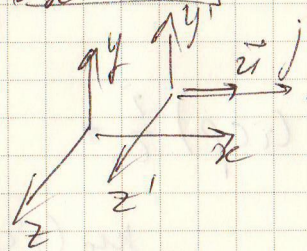
Закон сохранения заряда

в 4х мерном?! ...

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial (ic\rho)}{\partial (ict)} = 0$$

$$\left[\frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \right]$$



$$j^\alpha = (j_x, j_y, j_z, ic\rho)$$

в 4х мерном с.к. есть векторы. (почему бы и нет)

$$j^{1'} = \gamma(j^{1''} - i\frac{u}{c}j^{4''})$$

$$j^{4'} = \gamma(j^{4''} + i\frac{u}{c}j^{1''})$$

$$ic\rho = \gamma(ic\rho' + i\frac{u}{c}j_x')$$

$$\rho = \gamma(\rho' + \frac{u}{c}j_x')$$

$$j_x = \gamma(j_x' - \frac{u}{c}(ic\rho')) =$$

$$= \gamma(j_x' + u\rho')$$

и, конечно, не забудем

ΔΑΛΑΜΒΕΡΙΑΝ

ορμή
ποσότητας

$$\square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\square^2 \left(\frac{1}{c} \varphi \right) = -\mu_0 (ic\rho) \frac{1}{c}$$

$$-\mu_0 (ic\rho) \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \rho / \mu_0 (ic\rho) = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 ic} = \frac{1}{i}$$

πλεονεκ

$$A^\alpha = \{ A_x, A_y, A_z, \frac{i\varphi}{c} \}$$

φωτισμός

$$\square^2 \frac{A^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\mu_0 j^\alpha$$

$$A' = \gamma (A^\alpha - \frac{u}{c} A^4)$$

$$A^4 = \gamma (A^4 + \frac{u}{c} A^\alpha)$$

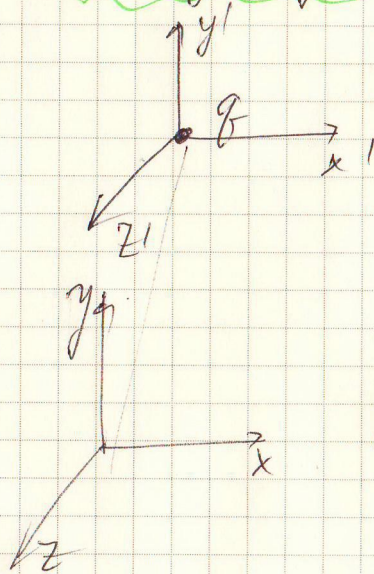
$$A_x = \gamma (A_x' - \frac{u}{c} (\frac{i\varphi}{c})) = \gamma (A_x' + \frac{u}{c^2} \varphi')$$

$$\frac{i\varphi}{c} = \gamma (\frac{i\varphi'}{c} - i \frac{u}{c} A_x')$$

$$\varphi = \gamma (\varphi' - u A_x')$$

copybook

Ποτε οβιτυμυρωςοε γαρεφ.



$$\varphi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

$$A_x' = 0, \text{ γαρεφ κεντρικ}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$A_x = \frac{u}{c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \varphi'$$